CALCULO DIFERENCIAL
Maynard Kong

Maynard Kong

CALCULO DIFERENCIAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 2001

CALCULO DIFERENCIAL

Maynard Kong

CÁLCULO DIFERENCIAL

CUARTA EDICIÓN

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 2001

Primera Edición, Diciembre de 1988
Segunda Edición, Mayo de 1991
Tercera Edición, Junio de 1995
Cuarta Edición, Marzo de 2001

Diagramación: José C. Cabrera Zúñiga
Nora O. Cabrera Zúñiga

CÁLCULO DIFERENCIAL

ISBN 9972-42-194-5

Hecho el Depósito Legal: 150105 2001 - 1036

Impreso en el Perú Printed in Peru

Maynard Kong. *Egresó de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Ingeniería. Se ha desempeñado como profesor del Departamento de Ciencias de la Universidad Católica en cursos de Matemáticas e Informática de niveles y especialidades variados. Obtuvo el grado PhD en la Universidad de Chicago (Estados Unidos de América) en 1976. Fue profesor visitante en la Universidad de Stuttgart (República Federal de Alemania) en 1979, y al mismo tiempo becario de la Fundación von Humboldt en un programa de posdoctorado, y posteriormente en Venezuela durante cuatro años.*

Ha publicado varios trabajos de investigación y textos de consulta universitaria, entre los que se pueden mencionar: Teoría de Conjuntos (coautor), Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Basic, Lenguaje de Programación Pascal, Lenguaje de Programación C, Lenguaje Ensamblador Macro Assembler e Inteligencia Artificial.

Ha participado en numerosos eventos de Matemáticas e Informática, tanto en el país como en el extranjero.

Prólogo

En este texto se desarrollan los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial y sus aplicaciones. La obra ofrece abundante material práctico, mediante ejemplos y problemas resueltos y propuestos, y está dirigida a los estudiantes de Ciencias, Ingeniería y Economía.

En la presente edición, además de corregir algunos errores y reescribir varias partes del texto original, he agregado un capítulo al comienzo para tratar las sucesiones y series de números y otro capítulo, al final, para las aplicaciones del axioma del supremo.

Los estudiantes e instructores interesados directamente en las aplicaciones del Cálculo Diferencial pueden omitir el último capítulo que tiene un carácter eminentemente teórico y su propósito es mostrar la deducción de los teoremas más importantes sobre los números reales partiendo de una presentación axiomática de los mismos.

El texto comprende temas sobre sucesiones y series, conceptos de geometría analítica del plano (las curvas: círculo, parábola, elipse e hipérbola, y la ecuación de segundo grado) necesarios en las aplicaciones posteriores, conceptos sobre límites, continuidad y derivación, y su uso en el estudio de las funciones.

Indice General

Capítulo 0. Sucesiones y Series

0.1	Valor absoluto. Propiedades	17
0.2	Algunas fórmulas trigonométricas	18
0.3	Fórmulas de la geometría analítica del plano. Distancia entre dos puntos. Punto medio. Pendiente de un segmento. Ecuación de la recta. Angulo entre dos rectas. Distancia de un punto a una recta	18
0.4	Funciones de variable real a valores reales	19
0.5	Intervalos	19
0.6	Vectores en el plano	21
0.7	Sucesiones de números reales. Sucesiones acotadas. Sucesiones convergentes y divergentes. Propiedades básicas. Algunas sucesiones especiales. Problemas resueltos.	22
0.8	Criterios de convergencia. Criterios de Cauchy. Sucesiones monótonas acotadas. Problemas resueltos.	34
0.9	Series de números. Problemas resueltos	48

Capítulo 1. *El Círculo*

1.1	Definición	57
1.2	Ecuación del círculo en coordenadas cartesianas	57
1.3	Problemas Resueltos	58
1.4	Problemas Propuestos	62

Capítulo 2. *La Parábola*

2.1	Definición	63
2.2	Notación	63
2.3	Ecuaciones de la parábola con eje paralelo a un eje de coordenadas	64
2.4	Ecuación vectorial de la parábola	64
2.5	Problemas Resueltos	65
2.6	Problemas Propuestos	72

Capítulo 3. *La Elipse*

3.1	Definición	75
3.2	Notación y algunas propiedades	76
3.3	Ecuación de la elipse con eje paralelo a un eje de coordenadas cartesianas	76
3.4	Problemas Resueltos	77
3.5	Problemas Propuestos	86

Capítulo 4. *La Hipérbola*

4.1	Definición	89
4.2	Notación y algunas propiedades	89
4.3	Ecuación de la hipérbola con eje transversal paralelo a un eje de coordenadas cartesianas. Asíntotas de una hipérbola	90
4.4	Hipérbolas conjugadas	92
4.5	Problemas Resueltos	92
4.6	Problemas Propuestos	101

Capítulo 5. *La Ecuación General de Segundo Grado*

5.1	Definición de sección cónica	103
5.2	Teorema de clasificación de secciones cónicas	103
5.3	Traslación de Ejes	105
5.4	Problemas Propuestos	106
5.5	Rotación de ejes	107
5.6	Problemas Resueltos	108
5.7	Definición de la ecuación general de segundo grado	111
5.8	Proposición: Eliminación del término cuadrático, ángulo de rotación	112
5.9	Teorema: Clasificación de la ecuación de segundo grado según el discriminante	112
5.10	Nota	112
5.11	Problemas Resueltos	114
5.12	Problemas Propuestos	120

Capítulo 6. *Límites de Funciones*

6.1	Definición de límite	123
6.2	Propiedades sobre límites de funciones. Límite de una función constante. Límites de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones. Límites de funciones polinómicas, racionales, potencias y raices. Traslación de la variable independiente. Teorema del Sandwich. Límites trigonométricos. Cambio de escala en la variable independiente. Límite de la composición de dos funciones o de cambio de variable	125
6.3	Problemas Resueltos	132
6.4	Límites unilaterales	147
6.5	Problemas Resueltos	147
6.6	Límites que contienen infinito	150
6.7	Problemas Resueltos	151
6.8	Límites infinitos	155
6.9	Teorema: Límites infinitos de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$	156

6.10 Teorema: Límites infinitos de funciones $\frac{1}{x^n}$ 157

6.11 Límites de la forma $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c$ 157

6.12 Problemas Resueltos 158

6.13 Asíntotas de una curva 163

6.14 Problemas Resueltos 164

6.15 Problemas Propuestos 167

Capítulo 7. ***Continuidad***

7.1 Definición: Continuidad en un punto 171

7.2 Observaciones 171

7.3 Definición: Continuidad en un intervalo abierto 172

7.4 Ejemplos 172

7.5 Propiedades de preservación de la continuidad 174

7.6 Teorema: Composición de funciones continuas 175

7.7 Clasificación de las discontinuidades 175

7.8 Definición: Continuidad en un intervalo cerrado 178

7.9 Propiedades fundamentales de las funciones continuas 181

7.10 Problemas Resueltos 182

Capítulo 8. ***Derivación y Funciones Elementales***

8.1 Derivada de una función 199

8.2 Regla para calcular la derivada en un punto 200

8.3 Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente a una curva 200

8.4 Problemas Resueltos 203

8.5 Continuidad y Derivación 211

8.6 Derivadas por la derecha y por la izquierda 212

8.7 Propiedades de la derivación 213

8.8 Derivadas de algunas funciones básicas 214

8.9 Nota 218

8.10	Problemas Resueltos	218
8.11	Problemas Propuestos	240
8.12	Regla de derivación en cadena	242
8.13	Problemas Resueltos	245

Capítulo 9. ***Aplicaciones de la Derivada***

9.1	Derivadas de orden superior	261
9.2	Derivadas de una función implícita	263
9.3	Derivadas de funciones representadas en forma paramétrica	266
9.4	Aplicaciones geométricas. Definición: rectas tangente y normal; segmentos y ángulo entre dos curvas	269
9.5	Razón de cambio. Velocidad y aceleración	274
9.6	Problemas Resueltos	278
9.7	Problemas Propuestos	309
9.8	Diferenciales: Definición. Observaciones. Aproximación de la diferencial. Propiedades de las diferenciales. Diferenciales de órdenes superiores	310
9.9	Problemas Resueltos	313
9.10	Valores máximos y mínimos de una función. Valor máximo absoluto, valor mínimo absoluto, valor mínimo relativo, extremo relativo. Teorema del extremo estacionario. Punto crítico. Cálculo de máximos y mínimos absolutos	322
9.11	Problemas Resueltos	332

Capítulo 10. ***El Teorema del Valor Medio y sus Aplicaciones***

10.1	Teorema de Rolle	349
10.2	Teorema del valor medio. Teorema de Taylor	351
10.3	Teorema del valor medio generalizado	355
10.4	Teorema de la función constante. Teorema de la diferencia constante	357
10.5	Problemas Propuestos	358
10.6	Regla de L'Hôspital. Evaluación de formas indeterminadas	366

10.7	Problemas Resueltos	372
10.8	Problemas Propuestos	387
10.9	Funciones crecientes y decrecientes	388
10.10	Criterio de la primera derivada para extremos relativos	390
10.11	Criterio de la segunda derivada para extremos relativos	395
10.12	Cálculo de extremos absolutos en intervalos arbitrarios	397
10.13	Concavidad y puntos de inflexión	400
10.14	Problemas Resueltos	404
10.15	Problemas Propuestos	415
10.16	Problemas Resueltos	417
10.17	Problemas Propuestos	428

Capítulo 11. Funciones Inversas

11.1	Definición de función Inversa	431
11.2	Teorema: Funciones inversas de funciones crecientes	433
11.3	Teorema: Función Inversa de funciones decrecientes	434
11.4	Derivada de la función Inversa	437
11.5	Problemas	441

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

11.6	La función arco seno	452
11.7	La función arco coseno	453
11.8	La función arco tangente	453
11.9	La función arco cotangente	455
11.10	La función arco secante	455
11.11	La función arco cosecante	456
11.12	Tabla de derivadas de las funciones trigonométricas inversas	456
11.13	Problemas Resueltos	456

FUNCIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIAL

11.14 La función logaritmo natural. Propiedades. Derivada logarímica 476

11.15 Problemas Resueltos 486

11.16 La función exponencial. Propiedades. La función exponencial general. El número e. Otras propiedades. Derivada de la exponencial con exponente arbitrario 497

11.17 Problemas Resueltos 506

Capítulo 12. ***El Axioma del Supremo y sus Aplicaciones***

12.1 Introducción 515

12.2 Axiomas de los números reales. Adición, multiplicación, orden y axioma del supremo. 517

12.3 Números naturales, enteros y racionales. Propiedades de los números naturales. 519

12.4 Propiedades básicas de los números reales. 521

12.5 Aplicaciones del Axioma del Supremo. Infimo. Parte entera de un número real. Propiedad arquimediana. Problemas resueltos. 523

12.6 Convergencia de sucesiones numéricas. Criterio de las sucesiones monótonas acotadas. Subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas. Criterio de Cauchy. 534

12.7 Aplicaciones a las funciones continuas. Teorema del valor intermedio. Teorema de los valores máximo y mínimo. Teorema de continuidad uniforme. 538

Indice Alfabético 543

Capítulo 0

Sucesiones y Series

Como es usual, $\mathbb{R}$ designa el conjunto de números reales y $\mathbb{R}^2$, al plar [illegible] onjunto de pares ordenados (x, y), en donde x e y son números reales.

0.1 VALOR ABSOLUTO

0.1.1 DEFINICION. Si x es un número real se define:

$$|x| = \textit{valor absoluto de } x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|0| = 0$ **b)** $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ **c** [illegible] $\frac{2}{5}| = \frac{2}{5}$ **d)** $|-3| = 3$

0.1.2 PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

(1) $|x| \geq 0$, para todo x

(2) $|x| = 0$, si y sólo si $x = 0$

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(4) $|x\,y| \leq |x| \times |y|$

(5) $|x| = \sqrt{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(6) $|x| < a$, si y sólo si $-a < x < a$

(7) $|x| \leq a$, si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

0.2 ALGUNAS FORMULAS TRIGONOMETRICAS

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \,.\, \cos y + \cos x \,.\, \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \,.\, \cos y - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

0.3 FORMULAS DE GEOMETRIA ANALITICA DEL PLANO

0.3.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. PUNTO MEDIO. Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, se define

$$d(P_1, P_2) = \textit{distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$P = \textit{punto medio} \text{ de } P_1 \text{ y } P_2 = (a, b),$$

donde $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

0.3.2 PENDIENTE DE UN SEGMENTO. Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos distintos, se define

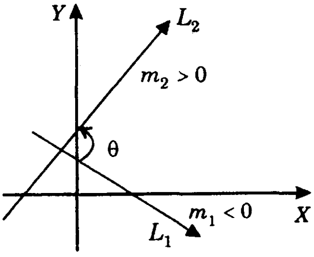
$$m = \textit{pendiente del segmento } P_1P_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

0.3.3 ECUACION DE LA RECTA. Una *recta* en el plano es el conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes, $A \times B \neq 0$.

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos distintos, entonces la ecuación de la recta L que pasa por P_1 y P_2 es



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y la *pendiente* m de la recta es $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

La recta L es orientada en el sentido positivo de acuerdo a su pendiente m. (Ver figura)

0.3.4 ANGULO ENTRE DOS RECTAS.

El *ángulo* θ *entre dos rectas* L_1 y L_2, es el ángulo determinado por la dirección positiva de L_1 y la dirección positiva de L_2 y que cumple $0 \le \theta \le \pi$.

El ángulo θ es dado por $\qquad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad$ y $\quad 0 \le \theta \le \pi$

Las rectas son *perpendiculares* si $m_1 m_2 = -1$ y *paralelas* si $m_1 = m_2$.

0.3.5 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA. La *distancia de un punto* $P_1 = (x_1, y_1)$ *a la recta* L: $Ax + By + C = 0$ se define mediante la fórmula

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

0.4 FUNCIONES DE VARIABLE REAL A VALORES REALES

Una *función* $y = f(x)$ de variable real x con valores reales y, es una correspondencia que asigna a cada valor de x exactamente un valor de y.

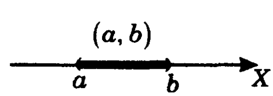
En el presente texto todas las funciones consideradas son definidas en números reales x y sus valores también son números reales. De esta manera, queda entendido que el término función será empleado solamente en este sentido.

Si $y = f(x)$, entonces y se llama la *variable dependiente* de la función y x, la variable *independiente.*

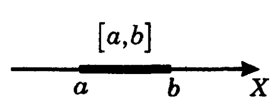
0.5 INTERVALOS

Si a y b son dos números tales que $a < b$, se definen los siguientes *intervalos*:

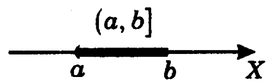
1) **Intervalo Abierto (a, b).** (a, b) consiste de todos los números reales x tales que $a < x < b$.



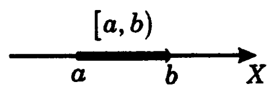
2) **Intervalo Cerrado $[a, b]$.** $[a, b]$ consiste de todos los números reales x tales que $a \le x \le b$.



3) **Intervalo Semiabierto por la Izquierda $(a, b]$.** $(a, b]$ consiste de todos los números reales x tales que $a < x \leq b$.

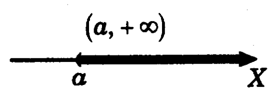


4) **Intervalo Semiabierto por la Derecha $[a, b)$.** $[a, b)$ consiste de todos los números reales x tales que $a \leq x < b$

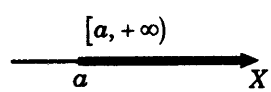


También se definen los siguientes intervalos:

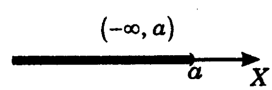
5) **Intervalo $(a, +\infty)$:** Consiste de todos los números reales x tales que $a < x$.



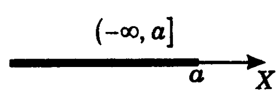
6) **Intervalo $[a, +\infty)$:** Consiste de todos los números reales x tales que $a \leq x$.



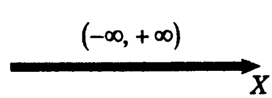
7) **Intervalo $(-\infty, a)$:** Consiste de todos los números reales x tales que $x < a$.



8) **Intervalo $(-\infty, a]$:** Consiste de todos los números reales x tales que $x \leq a$.



9) **Intervalo $(-\infty, +\infty)$:** Consiste de todos los números reales.



0.6 VECTORES EN EL PLANO

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano, y r un número real. Se define la *adición de puntos*

$$P_1 + P_2 = (a, b) \qquad \text{donde } a = x_1 + x_2 \text{ y } b = y_1 + y_2$$

y el *producto del escalar* r por el punto P_1 como $\quad rP_1 = (rx_1, rx_2)$

Ejemplos:

a) $(3, 2) + (-1, 5) = (2, 7)$ **b)** $-7 \,.\, (4, -1) = (-28, 7)$ **c)** $r(0, 0) = (0, 0)$

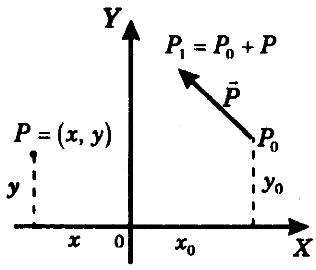
Cuando se consideran tales operaciones de adición y multiplicación, los puntos del plano reciben el nombre de *vectores*, y se les designa con una flecha en la parte superior.

REPRESENTACION GRAFICA DE UN VECTOR.

Sea $P = \vec{P} = (x, y)$ un vector y elijamos un punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Entonces el vector $\vec{P}$ se representa gráficamente como el segmento dirigido $\overrightarrow{P_0P_1}$, donde

$$P_1 = P + P_0 = (x + x_0, y + y_0)$$



La *longitud de un vector* $P = (x, y)$ es la distancia de P al vector $0 = (0, 0)$:

$$|P| = \textit{longitud de } P = d(P, 0) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En particular,

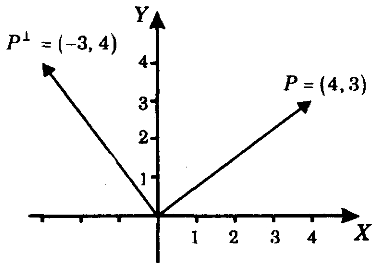
$$d(P_1, P_2) = |P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Si $|P| = 1$ se dice que P es un vector *unitario*.

Si $P=(a,b)$ se define $P^{\perp}$, *el vector perpendicular a P obtenido rotando P un ángulo recto en el sentido antihorario*, mediante

$$P^{\perp}=(-b,a)$$

Ejemplo



0.7 SUCESIONES DE NUMEROS REALES

Una sucesión (a_n) es una colección de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dispuestos según un orden indicado por los subíndices 1, 2, ..., n ...

Se llama término n-ésimo de la sucesión al número a_n .

También se consideran sucesiones cuyos subíndices empiezan en 0, o en otro entero n_0.

EJEMPLOS

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$ cuyo n-ésimo término es $a_n=\frac{1}{3^n}$, $n=$ 1, 2, 3 ...

2) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, $n=1, 2, \ldots$, esto es los términos son 2, 3/2, 4/3, 5/4, ...

3) La sucesión (a_n) dada por la regla $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$,

para la cual $a_1=\sqrt{2}-1$, $a_2=\sqrt{6}-2$, $a_3=\sqrt{12}-3, \ldots$

4) Si $e_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$, $n=0, 1, 2, 3 \ldots$

entonces $e_0=1$, $e_1=2$, $e_2=\frac{5}{2}=2.5$, $e_3=\frac{16}{6}=2.666\ldots$,

5) La sucesión (b_n), $n = 1, 2, \dots$, se define (por inducción) mediante las reglas

$$b_1 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$$

Así, sus términos son $\sqrt{2}, \ \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ \dots, \ \sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}$

6) Si a es un número real, se tiene la sucesión $\left(n^a\right)$,

cuyos términos son $1 = 1^a, \ 2^a, 3^a, \dots$

SUCESIONES ACOTADAS

Se dice que la sucesión (a_n) es acotada si existe un número positivo K tal que $|a_n| \le K$, para todo n.

De esta definición se sigue que la sucesión (a_n) no es acotada si y sólo si para todo número $K > 0$ y todo entero n se cumple

$$|a_m| > K \ , \quad \text{en algún} \quad m > n$$

esto es, no importa cuan grandes sean dados K y n, siempre hay un término a_m (en efecto, hay un número infinito!), con $m > n$, cuyo valor absoluto es mayor que K.

EJEMPLOS

Las sucesiones 1) y 2) de los ejemplos anteriores son acotadas. En efecto se tiene

$$\left|\frac{1}{3^n}\right| \le 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{n+1}{n}\right| \le 2$$

Más adelante se verá que también son acotadas las sucesiones 2)–6) .

Veamos que $\left(n^a\right)$ es acotada si $a \le 0$ y no es acotada si $a > 0$.

Si $a \le 0$ entonces $n^a = 1/n^{-a} = 1/n^p$, con $p \ge 0$, y puesto que $n^p \ge 1$ entonces $\left|n^a\right| = \dfrac{1}{n^p} \le 1$, para todo $n \ge 1$; luego $\left(n^a\right)$ es acotada.

Si $a > 0$, dados $K > 0$ y n elegimos $m =$ mayor de los números n y $(K+1)^{1/a}$; luego $m \ge n$ y $m \ge (K+1)^{1/a}$, de donde $m^a \ge K + 1 > K$, y $\left|m^a\right| > K$; por lo tanto $\left(n^a\right)$ no es acotada si $a > 0$.

0.7.1 SUCESIONES CONVERGENTES

Si (a_n) es una sucesión y L es un número real, escribimos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N, que depende de ε, tal que si $n \geq N$ entonces $|L - a_n| < \varepsilon$.

Esta propiedad significa que todos los valores a_n, a partir de un subíndice N, se hallan próximos a L a una distancia menor que ε. Esto es, a_n se acerca arbitrariamente a L, a medida que n crece.

En este caso decimos que (a_n) es convergente y que L es su límite. De otra manera se dice que la sucesión es divergente.

EJEMPLO 1. Probar que la sucesión $(1/n)$ es convergente y su límite es 0.

SOLUCION. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ sea N un entero positivo mayor que $1/\varepsilon$.
Entonces, para todo $n \geq N$ se tiene

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

EJEMPLO 2. Probar que la sucesión $((-1)^n)$ es divergente.

SOLUCION. Puesto que los valores del término n-ésimo $a_n = (-1)^n$ son alternadamente 1 y -1, según n sea par o impar, a_n no se aproxima a ningún número L cuando n crece indefinidamente y por lo tanto es de esperar que la sucesión no sea convergente, lo que formalmente, recurriendo a la definición de límite, procedemos a probar. Por el absurdo, supongamos que exista $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; entonces para $\varepsilon = 1$, existe N tal que $n \geq N$ implica $\left|L - (-1)^n\right| < 1$.

Esto es, $|L - 1| < 1$, si n es par, o $0 < L < 2$

y $|L + 1| < 1$, si n es impar, o $-2 < L < 0$

de donde resulta la contradicción $0 < L < 0$.

Luego es falso que exista $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y la sucesión es en efecto divergente.

Nota.

1. De la definición de límite se sigue que L es el límite de (a_n) , $n = 1, 2, \dots$, si y sólo si, para algún N_1, L es el límite de la sucesión (a_n), $n = N_1, N_1 + 1, \dots$, con subíndices a partir de N_1 ; así para determinar si la sucesión es convergente se puede omitir cualquier colección finita de términos de la sucesión.

2. Notemos que son equivalentes las desigualdades siguientes:

   (i) $|a_n - L| < \varepsilon$, *la distancia entre* a_n *y* L *es menor que* ε

   (ii) $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, a_n *se encuentra entre* $L - \varepsilon$ *y* $L + \varepsilon$

   (iii) $a_n - \varepsilon < L < a_n + \varepsilon$, L *se encuentra entre* $a_n - \varepsilon$ *y* $a_n + \varepsilon$

3. Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ con A y B números reales tales que $A < L < B$, entonces existe un entero N tal que $A < a_n < B$, para todo $n \geq N$.

   En efecto, si tomamos

   $$\varepsilon = \text{menor de } B - L \text{ y } L - A,$$

   de modo que $\varepsilon > 0$, $A \leq L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon \leq B$, existe N tal que se cumple (ii) de 2) y por lo tanto $A \leq L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \leq B$, si $n \geq N$.

4. Toda sucesión convergente (a_n) es acotada.

   En efecto, sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y elijamos $\varepsilon = 1$; entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $|a_n - L| < 1$, $|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$.

   Y por lo tanto $|a_n| \leq K =$ mayor de los números $|a_1|$, ... , $|a_{N-1}|$, $|L| + 1$ para todo $n \geq 1$.

5. Toda sucesión no acotada es divergente.

   En efecto, si la sucesión fuese convergente, por 3, sería acotada.

0.7.2 PROPIEDADES BASICAS

1) **Límite de una sucesión constante**

   Si $a_n = c$, para todo n, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$.

3) si $|a_n - L| \leq b_n$, para todo $n \geq N$, algún N, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ entonces $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

En las siguientes propiedades se asume que las sucesiones (a_n) y (b_n) son convergentes y que sus límites son A y B, respectivamente.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -A$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \, . \, b_n) = A.B$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, si $B \neq 0$

8) Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq N$, entonces $A \leq B$

9) Si $a_n \leq c_n \leq b_n$, para todo n, y $A = B$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

10) Si $A > 0$ y r es un número cualquiera, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^r = A^r$

Nota. Las pruebas de las propiedades 1)–9) se desarrollan en la sección 0.7.4 .

0.7.3 ALGUNAS SUCESIONES ESPECIALES

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$

Equivalentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} n^b = 0$, si $b < 0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (n + c)^{1/n} = 1$, para todo número c

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a)^{1/n} = 1$ si $a > 0$

4. Si $|x| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + x + \ldots + x^n\right] = \dfrac{1}{1-x}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, para todo número real x.

6. Si a y b son números reales, $b > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$

0.7.4 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

SOLUCION. Sea $a_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, y sea $\varepsilon > 0$. Tomando $N = 1$ se cumple $n \geq N$ implica $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

PROBLEMA 2. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$.

SOLUCION. Observemos que se cumple $|a_n - L| = \big|\,|a_n - L| - 0\,\big|$; luego para $\varepsilon > 0$ son equivalentes

existe un N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$

y existe un N tal que $\big|\,|a_n - L| - 0\,\big| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$,

y esto demuestra el resultado.

PROBLEMA 3. Si $|a_n - L| \leq b_n$, para todo $n \geq N_1$, algún N_1 , y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ probar que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, existe N, tal que $n \geq N$ implica $b_n = |b_n - 0| < \varepsilon$.

Sea entonces N_2 un entero mayor que N_1 y N. Para $n \geq N_2$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n - L| &\leq b && \text{(pues } n > N_1) \\ &< \varepsilon && \text{(pues } n > N) \end{aligned}$$

y esto prueba que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

PROBL A 4. Si $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $B = \lim_{n\to\infty} b_n$, probar que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existen enteros N_1 y N_2 tales que

$$n \geq N_1 \quad \text{implica} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$n \geq N_2 \quad \text{implica} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego si $n \geq N$, en donde N es el mayor de los números N_1 y N_2, se cumplen las dos desigualdades a la vez y por lo tanto

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

de donde se concluye que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

PROBLEMA 5. Probar que $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n$, si alguno de los límites existe.

SOLUCION. La demostración de este resultado es una consecuencia de

$$|a_n - A| = |-a_n + A| = |(-a_n) - B|, \quad \text{con} \quad B = -A,$$

y de la definición de límite.

Omitimos los detalles.

PROBLEMA 6. Si $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $B = \lim_{n\to\infty} b_n$, probar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = A . B$$

SOLUCION.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar N tal que $n \geq N$ implica $\left| a_n b_n - AB \right| < \varepsilon$.

Notemos que para cualquier n se cumple

$$a_n b_n - AB = (a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + (a_n - A)B$$

de donde

$$\left| a_n b_n - AB \right| \leq \left| a_n - A \right| \left| b_n - B \right| + |A| \left| b_n - B \right| + \left| a_n - A \right| |B| \qquad (*)$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea ε_0 = mínimo de 1 y $\varepsilon / (1 + |A| + |B|)$, de modo que $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, $\varepsilon_0^2 \leq \varepsilon_0$ y también $\varepsilon_0 (1 + |A| + |B|) \leq \varepsilon$.

Para ε_0, por definición de límite, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica las dos desigualdades $\left| a_n - A \right| < \varepsilon_0$ y $\left| b_n - B \right| < \varepsilon_0$ (N puede ser tomado como el mayor de dos subíndices N_1 y N_2 a partir de los cuales los términos de cada sucesión distan de sus límites menos de ε_0).

Entonces para $n \geq N$ el lado derecho de (*) es menor que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 + |A| \varepsilon_0 + \varepsilon_0 |B| &= \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + |A| + |B|) \\ &\leq \varepsilon_0 (1 + |A| + |B|) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto $\left| a_n b_n - AB \right| < \varepsilon$

de donde se sigue que $AB = \lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n$.

PROBLEMA 7. Si $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = B$ y $B \neq 0$, probar que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$

SOLUCION. Para $\varepsilon = \dfrac{|B|}{2} > 0$ existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $\left| b_n - B \right| < \dfrac{|B|}{2}$, y por lo tanto

$$|B| = \left| B - b_n + b_n \right| \leq \left| B - b_n \right| + |b_n| < \frac{|B|}{2} + |b_n| \,,$$

de donde $\frac{|B|}{2} < |b_n|$, en particular $b_n \neq 0$ y la sucesión $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ queda definida para $n \geq N_1$. Además, para tales n se tiene

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n||B|} \leq 2\frac{|B - b_n|}{|B|^2} \qquad (*)$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar N tal que $n \geq N$ implica

$$|b_n - B| < |B|^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

y, si tomamos $N \geq N_1$, también se cumple (*) para n y por lo tanto

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon$$

lo que significa $\frac{1}{B} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$.

Nota. Este resultado junto con el problema anterior implican la propiedad sobre el límite de sucesiones cocientes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

PROBLEMA 8. Si $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y $a_n \leq b_n$, para $n \geq M$, algún M , entonces $A \leq B$.

SOLUCION. Sea $c_n = a_n - b_n$. Entonces $c_n \leq 0$ y $C = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A - B$ y será suficiente demostrar que $C \leq 0$.

Por el absurdo, supongamos que se cumple $C > 0$; entonces para el valor particular $\varepsilon = \frac{C}{2}$ existe N tal que $|C - c_n| < \varepsilon$ si $n \geq N$, de donde $\frac{C}{2} = C - \varepsilon < c_n$ y $c_n > 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, es cierto que $C \leq 0$ o $A \leq B$.

PROBLEMA 9. Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ y $a_n \le c_n \le b_n$, para todo n, entonces $L = \lim_{n\to\infty} c_n$.

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$ y hallemos N tal que si $n \ge N$ entonces se cumplen las dos desigualdades $|a_n - L| < \varepsilon$ y $|b_n - L| < \varepsilon$; en particular $L < a_n + \varepsilon$, $b_n - \varepsilon < L$ y usando $a_n \le c_n \le b_n$

$$c_n - \varepsilon \le b_n - \varepsilon < L < a_n + \varepsilon \le c_n + \varepsilon$$

esto es, $\quad c_n - \varepsilon < L < c_n + \varepsilon \quad$ o $\quad |c_n - L| < \varepsilon$

Así, queda demostrado que $L = \lim_{n\to\infty} c_n$

PROBLEMA 10. Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$.

SOLUCION. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea N un entero mayor que $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$; luego, si $n \ge N$ se tiene

$$n^a \ge N^a > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{n^a} - 0\right| = \frac{1}{n^a} < \varepsilon .$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

PROBLEMA 11. Si $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, y $b_n \ne 0$, probar que $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ es divergente.

SOLUCION. Por el absurdo, supongamos que existe $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$.

Entonces de $1 = b_n \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$ se sigue

$$1 = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0 \times L = 0$$

lo cual es una contradicción.

PROBLEMA 12. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} (n+c)^{1/n} = 1$ para todo c.

SOLUCION.

El número $a_n = (n+c)^{1/n}$ se define para todo $n \geq 1-c$, o $n+c \geq 1$.

Entonces $a_n \geq 1$, pues $a_n^n = n+c \geq 1$, y $a_n = 1+r_n$, con $r_n \geq 0$.

Probaremos que se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

De $a_n^n = n+c$ se sigue $(1+r_n)^n = n+c$

$$1 + nr_n + \frac{n(n-1)}{2} r_n^2 + \ldots + = n+c$$

luego $$\frac{n(n-1)}{2} r_n^2 \leq n+c , \qquad r_n^2 \leq \frac{2(1+c/n)}{n-1} \leq \frac{4}{(n-1)}$$

para todo $n > c$, o $\dfrac{c}{n} < 1$, y $0 < r_n \leq \dfrac{2}{(n-1)^{1/2}}$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ por los problemas 9 y 10.

Finalmente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1+r_n) = 1+0 = 1$

PROBLEMA 13. Si $|x| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

SOLUCION. Si $x = 0$ se cumple $\left| x^n - 0 \right| = 0 < \varepsilon$ y por lo tanto es cierta la propiedad.

Supongamos que $x > 0$. Luego se tiene $1 > x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 1$ y $\dfrac{1}{x} = 1+r$, con $r > 0$. De

$$(1+r)^n = 1 + nr + \text{otros sumandos} \geq 0$$

se sigue $\dfrac{1}{x^n} = (1+r)^n \geq nr$, y por lo tanto $0 < x^n < \dfrac{1}{nr}$ de donde $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

pues $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nr} = 0$.

Si $x<0$ entonces $|x|>0$, $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ y también se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ pues $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^n = 0$, por el caso anterior.

PROBLEMA 14. Si $|x|<1$ entonces $\dfrac{1}{(1-x)} = \lim\limits_{n\to\infty} 1+x+\ldots+x^n$.

SOLUCION. En efecto, se tiene

$$1+x+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} 1+x+\ldots+x^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-x)} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

pues $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, por el problema anterior.

PROBLEMA 15. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, para cada número real x .

SOLUCION. Sea m un entero positivo mayor que $2|x|$.

Entonces para todo $n>m$ se cumple $n>2|x|$, $\dfrac{|x|}{n} < \dfrac{1}{2}$ y

$$\left|\frac{x^n}{n!} - 0\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^m}{m!}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{(m+1)}\cdots\frac{|x|}{n}}_{n-m\text{ factores}} \leq \frac{|x|^m}{m!}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} = A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

con $A = \dfrac{|x|^m}{m!}$.

Y de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m} = 0$ se sigue entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

PROBLEMA 16. Si a y b son números reales, $b>1$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$.

SOLUCION. Podemos escribir $b=1+p$, con $p>0$. Sea N un entero positivo tal que $N>a$.

Si $n \geq 2N$ se cumple $n-N \geq \dfrac{n}{2}$, $n-N+1 > \dfrac{n}{2}$ y

$$b^n = (1+p)^n > \binom{n}{N} p^N = \frac{n(n-1)\dots(n-N+1)}{N!} p^N > \frac{n^N p^N}{2^N N!}$$

luego $$\left| \frac{n^a}{b^n} - 0 \right| = \frac{n^a}{b^n} < \frac{K}{n^{N-a}} \ , \quad n \geq 2N \qquad (1)$$

en donde $K = \dfrac{2^N N!}{p^N}$

Usando la desigualdad (1) y los problemas 3 y 10 resulta $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$.

0.8 CRITERIOS DE CONVERGENCIA

1) CRITERIO DE CAUCHY

(a_n) es convergente si y sólo si satisface el criterio de Cauchy: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N, que depende de ε, tal que m y $n \geq N$ implican $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

2) SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

Si (a_n) es una sucesión tal que $a_n \leq a_{n+1} \leq C$, para todo n, y un número determinado C , entonces (a_n) es convergente y $a_k \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq C$, para todo k.

De igual modo, si $a_n \geq a_{n+1} \geq B$, para todo n, entonces $a_k \geq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq B$, para todo k.

EJEMPLOS.

1) La función exponencial $\exp(x)$

Usando el criterio de Cauchy se demuestra que para todo número x la sucesión $(s_n(x))$, dada por

$$s_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

converge a un número real que se designa por $\exp(x)$.

En este caso se escribe la expresión simbólica infinita.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

para indicar que las sumas dadas por $s_n(x)$ convergen a $\exp(x)$.

También se dice que $\exp(x)$ es la suma de la serie infinita del segundo miembro.

Se define el número e por

$$e = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 2.7182818284\dots$$

ALGUNAS PROPIEDADES

1) Si $x \geq 0$ entonces $\exp(x) \geq s_n(x)$, para todo n.

2) Si $N > 2|x|$ entonces

$$s_n(x) - R \leq \exp(x) \leq s_n(x) + R \ ,$$

para todo $n \geq N$ en donde $R = \dfrac{2|x|^{N+1}}{(N+1)!}$

2) Usando el criterio de las sucesiones acotadas se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

En general, se cumple $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$, para todo número real x.

0.8.1 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar los siguientes límites (si existen):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{n^3-1}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{1/n}-1\right)^n$

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1-\dfrac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

pues $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$, si $a>0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$, por la propiedad 6) de 0.7.3, con $a=1$ y $b=2$.

3) Sea $a_n = \sqrt{n^2+n}-n$. Entonces

$$a_n = a_n \times \frac{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} \qquad \text{(racionalizando)}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/2}+\dfrac{1}{n}}$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, pues $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/2} = 1$, por 10) 0.7.3 y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

4) Tenemos $\quad 0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{2\,n^{1/2}}$

y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$.

5) Sean $b_n = n^{1/n} - 1$ y $a_n = b_n^n$. Debemos hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Se tiene $0 < b_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 - 1 = 0$. Luego existe N tal que $b_n < 1/2$ para todo $n \geq N$, y por lo tanto, si $n \geq N$

$$0 < a_n = b_n^n < b_n \ , \qquad \text{pues } b_n < 1$$

y haciendo $n \to \infty$ se obtiene $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

PROBLEMA 2. Si $b_1 = \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$

1) probar que la sucesión es convergente

y **2)** hallar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

SOLUCION.

1) Por inducción sobre n se prueba que $1 < b_n < 2$. En efecto, si $n = 1$, $b_1 = \sqrt{2}$ ciertamente cumple la desigualdad; y si $1 < b_n < 2$ entonces $b_{n+1}^2 = 2 + b_n$ satisface $3 < b_{n+1}^2 < 4$, de donde también $1 < b_{n+1} < 2$.

Además, se cumple $b_n \leq b_{n+1}$, pues

$$\left(b_n - \tfrac{1}{2}\right)^2 < \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 , \qquad \text{de donde} \quad b_n^2 - b_n < 2 ,$$

y
$$b_n^2 < 2 + b_n = b_{n+1}^2$$

En resumen, se tiene que $1 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq 2$ y por lo tanto, por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas, 2) de 0.8, existe $L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y también $1 \leq L \leq 2$.

2) Calculamos el valor de L.

Tenemos
$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1}^2 = 2 + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$L^2 = 2 + L$$

usando la propiedad 10) de 0.7.2 en el primer miembro, de donde resulta la ecuación de segundo grado $L^2 - L - 2 = 0$ que resuelta da las raíces $L = -1, 2$.

Luego, $L = 2$ es el límite de la sucesión.

PROBLEMA 3. Usando el criterio de las sucesiones monótonas acotadas, probar que existe $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$, en donde

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

y que $2 \le e < 3$.

SOLUCION. Si $n \ge 3$ se tiene

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \left(\text{pues } n! > 2^{n-1}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$< 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \left(\text{usando } 1 + x + \ldots + x^{n-2} = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}\text{ , con } x = \frac{1}{2}\right)$$

de donde $s_n < 3$, si $n \ge 3$.

Además, es claro que $e_n < e_{n+1}$ y por lo tanto, por 2) de 0.8, existe el número $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ y cumple $2 = e_2 \le e \le 3$.

PROBLEMA 4. Hallar $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

SOLUCION. Usando $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ resulta

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 5. Hallar $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{n^3}$

SOLUCION.

De $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se sigue $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{4}{3}$.

PROBLEMA 6. Hallar $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^5 - 2n^3 + 10\right)^{1/3} - \left(16\,n^{12} + 7\,n^5 - \dfrac{1}{n}\right)^{1/4}}{n^3 - 4n^2 + 1}$

SOLUCION.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{n^4} - \dfrac{2}{n^{12}} + \dfrac{10}{n^9}\right)^{1/3} - \left(16 + \dfrac{7}{n^7} - \dfrac{1}{n^{13}}\right)^{1/4}}{1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{0 - 16^{1/4}}{1} = -2$$

PROBLEMA 7. Si $a > 0$, demostrar que $\left(n^a\right)$ es divergente.

SOLUCION. Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$; luego por el problema 11 de 0.7.4 la sucesión $\left(n^a\right)$ es divergente.

PROBLEMA 8. Dados los números $A_0, \ldots, A_p$, $B_0, \ldots, B_q$, A_p y B_q distintos de cero, se define la sucesión (x_n) por

$$x_n = \frac{A_p\, n^p + \ldots + A_1\, n + A_0}{B_q\, n^q + \ldots + B_1\, n + B_0}$$

Probar que

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ si $p < q$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{A_p}{B_p}$, si $p = q$

y 3) la sucesión es divergente si $p > q$

SOLUCION. Extrayendo los factores n^p y n^q del numerador y denominador de x_n, respectivamente, se obtiene

$$x_n = \frac{n^p}{n^q} \cdot y_n$$

en donde

$$y_n = \frac{A_p + \dfrac{A_{p-1}}{n} + \ldots + \dfrac{A_0}{n^p}}{B_q + \dfrac{B_{q-1}}{n} + \ldots + \dfrac{B_0}{n^q}}$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$, se tiene $Y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{A_p}{B_q} \neq 0$, y la convergencia de (x_n) depende entonces de la convergencia de la sucesión $\left(\dfrac{n^p}{n^q}\right)$.

1) Si $p < q$ se tiene $x_n = \dfrac{1}{n^a} y_n$, con $a = q - p > 0$, y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \times Y = 0$.

2) Si $p = q$, $x_n = y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Y = \dfrac{A_p}{B_q}$.

3) Si $p > q$, debemos probar que (x_n) es divergente.

Escribamos $a = p - q > 0$, de modo que $x_n = n^a y_n$, $n^a = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Ahora bien, si (x_n) fuese convergente, la sucesión (n^a) también sería convergente, en contradicción con el problema 7.

En consecuencia, la sucesión (x_n) es divergente si $p > q$.

PROBLEMA 9.

1) Usando el criterio de Cauchy, probar que para todo a existe el número

$$\exp(a) = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!}$$

2) Demostrar que si $a \geq 0$ entonces $\exp(a) \geq s_n$, para todo n.

3) Probar que si $N > 2|a|$ entonces $s_n - R \leq \exp(a) \leq s_n + R$, para todo $n \geq N$, en donde $R_n = \dfrac{2|a|^N}{(N+1)!}$.

SOLUCION. Si $m > n$, $p = m - n$ y $r = \dfrac{|a|}{n+2}$, se cumple la desigualdad

$$|s_m - s_n| \leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r}\right] \qquad (\alpha)$$

En efecto,

$$|s_m - s_n| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{a^{n+p}}{(n+p)!}\right|$$

$$\leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{|a|}{(n+2)} + \frac{|a|}{(n+2)} \times \frac{|a|}{(n+3)} + \ldots + \frac{|a|}{(n+2)} \times \ldots \times \frac{|a|}{(n+p)}\right]$$

$$\left(\text{notar que } \frac{|a|}{n+i} \leq r\,, \quad i = 2, \ldots, p\right)$$

$$\leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + r + \ldots + r^{p-1}\right] = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r}\right]$$

y queda establecida (α).

Si $n > 2|a|$, entonces $r = \dfrac{|a|}{(n+2)}$ cumple $0 \leq r \leq \dfrac{1}{2}$ y la desigualdad (1) implica:

$$|s_m - s_n| \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad \text{si } m > n \qquad (\beta)$$

ya que $\dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^p}{1-r} \leq \dfrac{1}{1-r} \leq \dfrac{1}{1/2} = 2$ para todo $m > n$.

1) Sea dado $\varepsilon > 0$. De $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|^n}{n!} = 0$ para $\dfrac{\varepsilon}{2}$ existe N tal que

$$n \geq N \quad \text{implica} \quad \frac{|a|^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\gamma)$$

Además, podemos elegir N tal que $N \geq 2|a|$ y por lo tanto si $n \geq N$ también $n \geq 2|a|$ y podemos aplicar (β).

Finalmente, si $m, n \geq N$ se cumple $|s_m - s_n| < \varepsilon$. En efecto, podemos suponer que $m > n$ y usando (β) y (γ) obtenemos

$$|s_m - s_n| \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} < 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En conclusión, la sucesión (s_n) satisface el criterio de Cauchy y por lo tanto existe $\exp(a) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

2) Puesto que $a \geq 0$ se tiene $\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$, luego $s_n \leq s_{n+1}$; además (s_n) es una sucesión acotada por ser convergente. Luego, por el criterio de las sucesiones acotadas su límite $\exp(a)$ cumple $\exp(a) \geq s_n$, para todo n.

3) Si $N > 2|a|$, es válida la desigualdad (β) para $m > n \geq N$

$$|s_m - s_n| \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq R = \frac{2|a|^{n+1}}{(N+1)!} \qquad \text{o} \qquad s_n - R \leq s_m \leq s_n + R$$

y haciendo $m \to \infty$ (n permanece fijo), resulta $s_n - R \leq \exp(a) \leq s_n + R$.

PROBLEMA 10. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, en donde $e = \exp(1)$.

SOLUCION. Sean $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

Entonces $$a_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

Para $k = 0,1, \ldots ,n$, el término k-ésimo del desarrollo de a_n es

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \tag{1}$$

y por lo tanto es menor o igual a $\frac{1}{k!}$; luego $a_n \le s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le e$, y (a_n) es una sucesión acotada.

Puesto que $1 - \frac{i}{n} \le 1 - \frac{i}{n+1}$, para $i = 0, 1, \ldots , n$, de (1) vemos que el término k–ésimo de a_n es menor o igual que el término k–ésimo de a_{n+1} y por lo tanto $a_n \le a_{n+1}$. Por consiguiente, podemos aplicar el criterio de las sucesiones monótonas y concluir que existe $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y además que

$$a_n \le L \le e \text{ , para todo } n.$$

Falta probar que $L = e$. Veamos que se cumple $s_m \le L$, para todo m. En efecto, si $k = 0, 1, \ldots , m$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} , \quad \text{por (1).}$$

Luego, si m permanece fijo y $n > m$, se tiene

$$a_n \ge \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \ldots + \binom{n}{m}\frac{1}{n^m}$$

y tomando límites cuando $n \to \infty$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{m!} = s_m$$

Finalmente, de $s_m \le L$, para todo m, tomando límites resulta $e = \lim\limits_{m\to\infty} s_n \le L$

y por lo tanto $L = e$, lo que establece $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

PROBLEMA 11. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$, en donde $\log y$, $y > 0$, es el número x tal que $\exp(x) = y$.

Nota: $\log y$ o $\ln y$ es el logaritmo natural de $y > 0$. En el capítulo 11 se presenta una definición geométrica de $\ln y$.

SOLUCION. Sea $a_n = \dfrac{\log n}{n}$. Entonces $\log n = n\, a_n$ o $\exp(n\, a_n) = n$.

Puesto que $n\, a_n \ge 0$, podemos aplicar 2) del problema 9, con $n = 2$, $x = n\, a_n$, y obtenemos

$$n \ge 1 + n\, a_n + \frac{(n\, a_n)^2}{2}$$

de donde $n > \dfrac{n^2\, a_n^2}{2}$, $0 < a_n < \left(\dfrac{2}{n}\right)^{1/2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

PROBLEMA 12. Probar que

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} n \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$

SOLUCION.

1) Sea $a_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Se tiene $1+\dfrac{1}{n} = \exp(a_n) \ge 1 + a_n$, luego $0 \le a_n \le \dfrac{1}{n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) Sea $b_n = n \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Por 1) se tiene $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \le \dfrac{1}{n}$,

$b_n \le 1$, y si $n \ge 8$ $\dfrac{b_n}{n} \le \dfrac{1}{8}$.

Fijemos $n \geq 8$ y hagamos $x = \frac{b_n}{n}$, luego $\exp(x) = 1 + \frac{1}{n}$.

Puesto que $N = 1 > 2\left(\frac{1}{8}\right) \geq 2x$ por 3), problema 9, se cumple la desigualdad

$1 + x - R \leq \exp(x) \leq 1 + x + R$

en donde $R = \dfrac{2x^{N+1}}{(N+1)!} = \dfrac{2x^2}{2} = x^2$,

y por lo tanto
$$1 + x - x^2 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + x + x^2$$
$$x - x^2 \leq \frac{1}{n} < x + x^2$$

de donde $b_n - \dfrac{b_n^2}{n} \leq 1 \leq b_n + \dfrac{b_n^2}{n}$

y $b_n - \dfrac{1}{n} \leq 1 \leq b_n + \dfrac{1}{n}$, pues $b_n \leq 1$,

Así se obtiene $|b_n - 1| \leq \dfrac{1}{n}$, si $n \geq 8$, y esto implica $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

PROBLEMA 13. Hallar $L = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)!}$

SOLUCION.

Sean
$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$
$$t_n = 1 + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Luego $\exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, $\exp(-1) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$, $a_n = s_{2n} + t_{2n}$ y
$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} t_{2n} = \exp(1) + \exp(-1).$$

Se sabe que $e = \exp(1)$ y se prueba que $\exp(-1) = 1/e$ y por lo tanto

$$L = e + 1/e\ .$$

PROBLEMA 14. Probar que $5e = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{2^3}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \ldots + \dfrac{n^3}{n!}$

SOLUCION. Sea $a_n = 1 + \dfrac{2^3}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \ldots + \dfrac{n^3}{n!}$

Tenemos $1 = 1$

$$\frac{2^3}{2!} = 1 + 3\,.\,1 \qquad\qquad \frac{3^3}{3!} = \frac{1}{2} + 3\,.\,1 + 1$$

$$\frac{4^3}{4!} = \frac{1}{6} + \frac{3\,.\,1}{2} + 1$$

y en general para $n \geq 3$

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3\,.\,1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \tag{1}$$

En efecto

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{1 + 2(n-1) + (n-1)^2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{(n-1)}{(n-2)!}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{(n-2) + 1}{(n-2)!}$$

de donde resulta (1).

Luego si $n \geq 3$ se tiene

$$a_n = s_{n-1} + 3s_{n-2} + s_{n-3}\ , \quad \text{en donde} \quad s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

tiene límite $e = \exp(1)$, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e + 3e + e = 5e$$

PROBLEMA 14.

a) Si $e = \exp(1)$ probar que $0 < e - s_n < \dfrac{1}{n!\,n}$, para todo $n \geq 1$, en donde

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

b) Probar que e es un número irracional

SOLUCION.

a) Tenemos $0 < s_n < s_{n+1} \leq e$ y $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$; luego $0 < s_n < e$.

Y si $m > n$ se cumple

$$s_m - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}\right], \quad \text{siendo} \quad p = m - n$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + r + r^2 + \ldots + r^{p-1}\right], \qquad r = \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r}\right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{1-r} = \frac{n+2}{(n+1)!\;(n+1)}, \quad \text{pues} \quad \frac{1}{1-r} = \frac{n+2}{n+1}$$

Luego, haciendo que $m \to \infty$ se tiene

$$e - s_n \leq \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)} < \frac{1}{n!\,n}, \quad \text{pues } n+2 < \frac{(n+1)^2}{n}$$

2) Por el absurdo, supongamos que e es un número racional y escribamos $e = \frac{p}{q}$, en donde p y q son números enteros positivos. Entonces por 1) con $n = q$ se tiene

$$0 < \frac{p}{q} - s_q < \frac{1}{q!\,q}$$

y si hacemos
$$x = q!\,q\left(\frac{p}{q} - s_q\right) = p\,q! - q\,q!\,s_q$$

entonces $0 < x < 1$, de modo que x no puede ser un número entero.

Sin embargo, la definición de x implica que es un entero; en efecto $p\,q!$ es un entero y tambhién $q\,q!\,s_q$, pues es la suma de los enteros $q\frac{q!}{k!}$, $k = 1, \ldots, q$.

La contradicción obtenida demuestra que e no puede ser un número racional.

0.9 SERIES DE NUMEROS

Una serie es una expresión simbólica de la forma

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

que representa o indica la suma ordenada (infinita) de los términos de una sucesión de números (a_n).

Se suele abreviar la expresión de la serie mediante la notación

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum_{0}^{\infty} a_n$$

en donde n es una variable que recorre los números enteros ≥ 0.

Se dice que la serie es convergente si la sucesión de los números

$$s_n = a_0 + \ldots. + a_n ,$$

es convergente; esto es, si existe un número L, al que se llama suma de la serie, tal que

$$L = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_0 + \ldots + a_n$$

lo cual significa que los números $a_0 + \ldots + a_n$ se aproximan arbitrariamente a L a medida que se agregan los siguientes términos $a_{n+1}, \ldots$

También se suele escribir

$$L = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

o

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

para indicar que la serie es convergente y su suma es L.

A las series no convergentes también se les llama divergentes.

EJEMPLOS.

1) La serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c x^n = c + cx + cx^2 + \ldots + cx^n + \ldots$$

es convergente, y su suma es $\dfrac{c}{1-x}$, si $-1 < x < 1$, (ver problema 14, 0.7.4).

2) La serie exponencial

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ y su suma se representa por $\exp(x)$ (Ver problema 8, 0.8.1). Así,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3) **Representación decimal de los números reales**

Todo número real $x \geq 0$ se puede expresar como la suma de una serie de la forma

$$d_0 + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_n}{10^n} + \ldots$$

en donde d_0 es un entero ≥ 0 y d_1, d_2, ..., son dígitos decimales, esto es uno de los números 0, 1, ... , 9

En este caso se suele emplear la notación

$$x = d_0 . d_1 \ldots d_n \ldots$$

Si x es negativo, entonces

$$x = -d_0 . d_1 \ldots d_n \ldots$$

en donde el segundo miembro es una representación decimal de $-x > 0$.

4) Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ pueden definirse formalmente — independientemente de su origen geométrico — mediante sumas de series

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

En efecto, puede demostrarse que estas series son convergentes para cualquier valor de x, y por lo tanto existen sus sumas, y luego, usando estas definiciones, se establecen las propiedades conocidas tales como

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 , \qquad \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \,.\, \cos y + \cos x \,.\, \operatorname{sen} y$$

5) La serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots ,$$

en donde p es un número real dado, es convergente si $p > 1$ y es divergente si $p \leq 1$

0.9.1 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Probar que si $\sum_{0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Equivalentemente, si la sucesión (a_n) es divergente o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{0}^{\infty} a_n$ es divergente.

SOLUCION.

Por hipótesis, existe $L = \lim_{n\to\infty} s_n$, en donde $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$; luego de $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = L - L = 0$$

PROBLEMA 2. Sea a un número real > 0 .

1) Si $N \geq 1$, demostrar que existe un número b dado por una representación decimal tal que $b^N = a$ y $b > 0$

2) Probar que existe un único número $b > 0$ tal que $b^N = a$ y $b > 0$. Tal número se llama la raiz N-ésima de a y se le designa por $a^{1/N}$

3) Probar que a tiene una representación decimal.

SOLUCION.

1) Por inducción encontraremos una sucesión de enteros no negativos (d_n) tales que d_n es un dígito decimal si $n \geq 1$, y si

$$s_n = d_0 + \frac{d_1}{10^1} + \dots + \frac{d_n}{10^n}, \text{ entonces } (s_n)^N \leq a \leq \left(s_n + \frac{1}{10^n}\right)^N \qquad (\alpha)$$

Para $n = 0$ sea d_0 el entero tal que $d_0^N \leq a < (d_0 + 1)^N$; tal número existe pues podemos encontrar un entero $K \geq 1$ tal que $a < K$ y por lo tanto

$$0^N = 0 \leq a < K < K^N, \qquad 0^N \leq a < K^N \qquad (\beta)$$

de donde se sigue que

$$d_0^N \leq a < (d_0 + 1)^N, \text{ para algún entero } d_0 \text{ con } 0 \leq d_0 < K.$$

Si $s_0 = d_0$ evidentemente (α) es verdadera.

Supongamos que ya existen $d_0, \dots, d_n$, $n \geq 0$, de manera que se cumple (α). Vamos a determinar d_{n+1}. Por inducción se tiene

$$s_n^N \leq a < \left(s_n + \frac{1}{10^n}\right)^N$$

o

$$\left(s_n + \frac{0}{10^{n+1}}\right)^N \leq a < \left(s_n + \frac{10}{10^{n+1}}\right)^N$$

y por lo tanto, existe un entero k tal que $0 \leq k \leq 9$ y

$$\left(s_n + \frac{k}{10^{n+1}}\right)^N \leq a < \left(s_n + \frac{k+1}{10^{n+1}}\right)^N$$

luego si $d_{n+1} = k$, $s_{n+1} = s_n + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}}$ se cumple (α) para $n+1$ y la inducción está completa.

Notemos que en el último paso se ha probado que d_{n+1} es un dígito decimal.

Veamos ahora que (s_n) es convergente. Puesto que cada $d_n \geq 0$ se tiene $s_n \leq s_{n+1}$ y también $s_n \leq K$, por (β), pues $s_n^N \leq a < K^N$; luego por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas existe el número $b = \lim_{n\to\infty} s_n$ y $b \geq s_0 \geq 0$.

El número b cumple $b^N = a$; en efecto:

$$s_n^N \leq a \leq \left(s_n + \frac{1}{10^n}\right)^N$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n^N \leq a \leq \lim_{n\to\infty} \left(s_n + \frac{1}{10^n}\right)^N$$

$$b^N \leq a \leq b^N, \qquad \text{pues } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

de donde $b^N = a$.

De la ecuación anterior se sigue que $b \neq 0$, pues $a > 0$, y por lo tanto $b > 0$.

2) Si $N \geq 1$ por 1) podemos encontrar $b > 0$ tal que $b^N = a$. Y si $N \leq -1$ entonces $-N \geq 1$ y también por 1), aplicado al número $\frac{1}{a}$, existe $c > 0$ tal que $c^{-N} = \frac{1}{a}$, de donde $b^N = a$, con $b = \frac{1}{c} > 0$.

Probaremos ahora la unicidad del número b: Si c es un número > 0 y $c^N = a$, entonces $b = c$. En efecto, si fuesen distintos el cociente r sería distinto de 1 y de $b^N = c^N$ se tendría $r^N = 1$, con $r \neq 1$, lo que es imposible pues N es distinto de cero; luego $b = c$.

3) se sigue de 1) para el valor $N = 1$, pues $b = a$ ya que $a^1 = a$.

PROBLEMA 3. Probar que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es divergente si $p \le 1$

SOLUCION.

Caso 1. $p \le 0$

Si $p < 0$ entonces $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ es divergente, y si $p = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^0} = 1$. Luego por el problema 1, la serie es divergente si $p \le 0$.

Caso 2. $0 < p \le 1$

Sean $$s_n^p = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} \quad \text{y} \quad s_n = s_n^1$$

Supongamos $0 < p \le 1$; entonces $n^p \le n$ y $\frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}$, de donde

$$1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} \ge 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

o sea $s_n^p \ge s_n$, para todo n.

Probaremos luego que la sucesión $\left(s_n^p\right)$ no es acotada; luego es divergente, y esto significa que la serie es divergente.

Sea dado $K > 0$. Tomemos $N = 2^{2K}$. Si $n \ge N$ se tiene

$$s_n \ge s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$$

De $$2^{2K} - 1 = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2K-1}$$

se sigue $$N = 2 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2K-1}$$

y podemos agrupar los sumandos de s_N en $2K$ sumas formadas por 2, 2^1, 2^2, .. , 2^{2K-1}, términos consecutivos:

$$\begin{aligned} s_N &= \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{2k-1}-1} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}}\right) \\ &> 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + \ldots + 2^{2K-1}\left(\frac{1}{2^{2K}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2} \qquad (2K \text{ sumandos}) \\ &= 2K\left(\tfrac{1}{2}\right) = K \end{aligned}$$

Así, para todo $n \ge N$ se cumple $s_n^p \ge s_n \ge K$ y la sucesión $\left(s_n^p\right)$ no es acotada.

PROBLEMA 4. Probar que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$.

SOLUCION. Sea $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}$. Es claro que $s_n < s_{n+1}$ y por lo tanto la sucesión (s_n) es monótona.

Sea $r = \frac{1}{2^{p-1}}$; luego $0 < r < 1$, pues $p > 1$ implica $2^{p-1} > 1$, y también sea $M = 1 + \frac{1}{1-r}$.

Probaremos que $s_n \leq M$ para todo n, y por lo tanto la sucesión (s_n) es acotada.

En efecto, dado n elijamos un entero K tal que $n < 2^{2K}$ y hagamos $N = 2^{2K}$; luego agrupamos los términos de s_N como en el problema anterior y obtenemos

$$s_n \leq s_N = \left(1+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\left(2^{2k-1}\right)^p-1}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{2k}\right)^p}\right)$$

$$> 2(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^p + 4\left(\frac{1}{4}\right)^p + \ldots + 2^{2K-1}\left(\frac{1}{2^{2K-1}}\right)^p$$

$$= 2 + r + r^2 + \ldots + r^{2K-1}$$

$$< 1 + \frac{1}{1-r} = M$$

Finalmente, por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas, la sucesión (s_n) es convergente y por lo tanto existe la suma de la serie.

PROBLEMA 5. Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x en el intervalo $(-R, R)$, $R > 0$, si existe una constante M tal que $|a_n| R^n \leq M$, para todo n.

SOLUCION. Sea x en el intervalo $(-R, R)$, esto es $|x| < R$ y elijamos un número r tal que $|x| < r < R$; luego $r = cR$, con $0 < c < 1$.

Debemos probar que la sucesión (s_n), $s_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

es convergente, para lo cual demostraremos que satisface el criterio de Cauchy.

Si $m > n \geq 0$, $m = n + p$, se tiene

$$\left| s_m - s_n \right| \leq M \frac{c^{n+1}}{1-c} ; \tag{1}$$

en efecto

$$\begin{aligned} \left| s_m - s_n \right| &= \left| a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p} \right| \\ &\leq \left| a_{n+1} \right| r^{n+1} + \ldots + \left| s_{n+p} \right| r^{n+p} \\ &= c^{n+1} \left| a_{n+1} \right| R^{n+1} + \ldots + c^{n+p} \left| a_{n+p} \right| R^{n+p} \\ &\leq M\, c_{n+1}^{n+1} \left(1 + c + \ldots + c^{p-1} \right) \leq M \frac{c^{n+1}}{(1-c)} \end{aligned}$$

Puesto que $0 < c < 1$ implica $\lim\limits_{n \to \infty} c^n = 0$, dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon \dfrac{1-c}{M}$ podemos encontrar un entero N tal que si $n \geq N$ entonces

$$c^n < \varepsilon \frac{1-c}{M} \qquad \text{o} \qquad M \frac{c^n}{1-c} < \varepsilon \tag{2}$$

Luego, si $m > n \geq N$, por (1) y (2) se tiene $\left| s_m - s_n \right| < \varepsilon$, y por lo tanto la sucesión (s_n) satisface el criterio de Cauchy.

PROBLEMA 6. Aplicando el problema 5, probar que las siguientes series son convergentes:

1) serie de $\operatorname{sen}(x)$ $\quad \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad$ para todo x

2) serie de $\cos(x)$ $\quad \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad$ para todo x

3) serie de $\operatorname{arc\,tg}(x)$ $\quad \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $\quad$ si $-1 < x < 1$

en donde $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$ si y sólo si $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

4) serie de $\log(1-x)$ $\qquad \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $\qquad$ si $-1 < x < 1$

SOLUCION. Todas las series son de la forma $\sum_{0}^{\infty} a_m x^m$.

1) $a_m = 0$ si m es par y $a_m = \frac{(-1)^m}{(2n+1)!}$, si $m = 2n+1$.

Ahora bien, dado x sea $R = |x| + 1$, de modo que $|x| < R$; de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R^m}{m!} = 0$ se sigue que existe $K > 0$ tal que $|a_m| R^m \leq K$, para todo m, y por el problema anterior la serie converge en cada punto del intervalo $(-R, R)$, y en particular en x.

2) En este caso $a_m = 0$ si n es impar y $a_m = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, si $m = 2n$; y se puede aplicar los mismos pasos de 1).

3) Los coeficientes son $a_m = 0$ si m es par y $a_m = \frac{(-1)^m}{(2n+1)}$, si $m = 2n+1$. Luego $|a_m| \leq 1$ y $|a_m| R^m \leq K$, con $R = K = 1$, y por el problema anterior la serie converge en $(-1, 1)$.

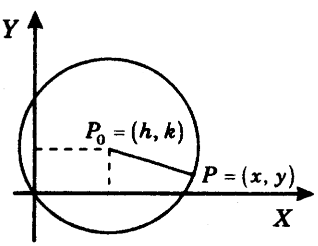
4) Similar a 3).

Capítulo 1

El Círculo

1.1. DEFINICION. Sea $P_0=(h,k)$ un punto del plano euclideano $\mathbb{R}^2$ y r un número real >0. Se llama *círculo C de centro P_0 y radio r*, al conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia de P_0 es r. Así,

$$C=C(P_0;r)=\left\{P\in\mathbb{R}^2\ /\ |P-P_0|=r\right\}$$



1.2 ECUACION DEL CIRCULO EN COORDENADAS CARTESIANAS

TEOREMA. La ecuación del círculo C de centro $P_0=(h,k)$ y radio r en coordenadas cartesianas es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{1.2.1}$$

Es decir, $(x,y)\in C \Leftrightarrow (x,y)$ satisface $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

PRUEBA. Sea $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Entonces en virtud de la definición 1.1 se tiene

$$P\in C \Leftrightarrow |P-P_0|=r \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$
$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Nota. Desarrollando los cuadrados del primer miembro de la ecuación (1.2.1) se observa que C es la gráfica de la ecuación,

$$x^2 + y^2 - 2hk - 2ky + \left(h^2 + k^2 - r^2\right) = 0,$$

que es de la forma $\qquad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$

donde $\qquad D = -2h, \quad E = -2k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2$

De manera recíproca, podemos establecer lo siguiente

PROPOSICION. Sea C la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es decir, $\qquad C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\right\}$

Llamemos $\Delta = D^2 + E^2 - 4F$. Se tiene entonces que:

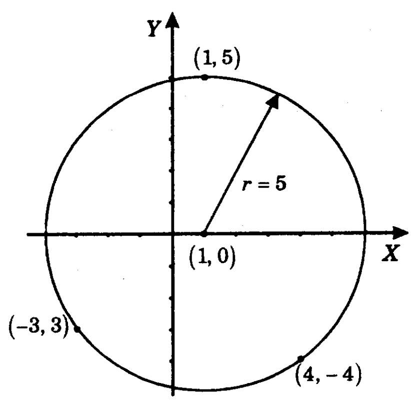
1) Si $\Delta > 0$, C es un círculo de centro $P_0 = \left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$ y radio $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

2) Si $\Delta = 0$, C consiste solamente del punto $P_0 = \left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$.

3) Si $\Delta < 0$, C no posee puntos.

1.3 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(1, 5)$, $(4, -4)$, $(-3, 3)$



SOLUCION. Sea $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ la ecuación del círculo. Puesto que los puntos dados pertenecen al círculo, ellos satisfacen esta ecuación. Luego se tiene

$$\begin{aligned} 26 + D + 5E + F &= 0 \\ 32 + 4D + 4E + F &= 0 \\ 18 - 3D + 3E + F &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$D = -2, \quad E = 0, \quad F = -24 .$$

RESPUESTA. $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \qquad$ o $\qquad (x - 1)^2 + y^2 = 5^2$

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación del círculo circunscrito al triángulo cuyos lados están sobre las rectas

$$L_1:\ x-2y+11=0$$
$$L_2:\ 3x-y-2=0$$
$$L_3:\ 7x+y+2=0$$

SOLUCION. Hallaremos los puntos P, Q y R en los que las rectas se intersecan y luego determinaremos el círculo que pasa por ellos, como el problema anterior.

P = *intersección de* L_1 *y* L_2. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x-2y+11&=0\\ 3x-y\ -2&=0\end{aligned}$$

y obtenemos: $x=3$, $y=7$, o sea $P=(3,7)$

Q = *Intersección de* L_2 *y* L_3. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x-y-2&=0\\ 7x+y+2&=0\end{aligned}$$

y obtenemos: $x=0$, $y=-2$, o sea $Q=(0,-2)$

R = *intersección de* L_1 *y* L_3. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x-2y+11&=0\\ 7x+y+\ 2&=0\end{aligned}$$

y obtenemos: $x=-1$, $y=5$, o sea $R=(-1,5)$

Sea $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ la ecuación del círculo que pasa por P, Q y R. Puesto que tales puntos se encuentranm en el círculo se tendrá

$$\begin{aligned} 58+3D+7E+F&=0\\ 4-2E+F&=0\\ 26-D+5E+F&=0\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene $D=-6$, $E=-4$, $F=-12$

RESPUESTA. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ o $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

PROBLEMA 3. Probar que si $\Delta=D^2+E^2-4F>0$, entonces la gráfica de la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ es un círculo de centro $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$ y radio $\dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

SOLUCION. En la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

completamos cuadrados $\left(x^2+Dx+\dfrac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\dfrac{E^2}{4}\right)-\dfrac{D^2}{4}-\dfrac{E^2}{4}+F=0$

y obtenemos $\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(D^2+E^2-4F\right)=\dfrac{1}{4}\Delta=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^2,$

que es la ecuación del círculo de centro $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$ y radio $\dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}>0$

PROBLEMA 4. Hallar una ecuación de la cuerda común de los dos círculos $x^2+y^2-6y-12=0$ y $x^2+y^2+8x-2y+8=0$.

SOLUCION. Si (x_1, y_1) es un punto de intersección se tiene

$$x_1^2+y_1^2+4x_1-6y_1-12=0 \qquad (1)$$

$$x_1^2+y_1^2+8x_1-2y_1+\ 8=0 \qquad (2)$$

y restando miembro a miembro obtenemos

$$\begin{aligned} -4x_1-4y_1-20&=0 \\ x_1+\ y_1+\ 5&=0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Sustituyendo y_1 de (3) en (1) obtenemos la ecuación $2x_1^2+20x_1+43=0$

cuyas raíces son $x_1=-5\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

Luego los puntos de intersección son $\left(-5+\frac{\sqrt{14}}{2},\ -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\left(-5-\frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$. Ahora podemos calcular la ecuación de la recta conociendo dos puntos por los cuales pasa, o también de una manera más breve observando que los puntos de intersección según (3) satisfacen la ecuación de la recta $x+y+5=0$. Luego en cualquier caso, obtenemos $x+y+5=0$.

PROBLEMA 5. Encontrar una ecuación de la recta que es tangente al círculo $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ en el punto $(-1,1)$.

SOLUCION. La ecuación del círculo es $(x-2)^2+(y+3)^2=25$, y por lo tanto $(2,-3)$ es el centro del círculo.

La pendiente del segmento $(2,-3),(-1,1)$ es $m=\dfrac{1-(-3)}{-1-(2)}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$

La recta tangente al círculo en $(-1,1)$ es perpendicular al segmento que hemos indicado. Luego su pendiente es $3/4$.

Finalmente $\dfrac{y-1}{x-(-1)}=\dfrac{3}{4}$ nos da $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$, que es la ecuación buscada.

PROBLEMA 6. Hallar una ecuación de cada una de las rectas que tienen pendiente $-4/3$ y son tangentes al círculo:

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$$

SOLUCION. Determinaremos los puntos en los que las rectas son tangentes al círculo. De $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ vemos que $(-1, 4)$ es el centro del círculo. La ecuación del diámetro perpendicular a las rectas es

$$\frac{y-4}{x+1} = \frac{3}{4} \quad \text{o} \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación del círculo para hallar las coordenadas de los puntos de tangencia obtenemos $x^2 - 2x - 15 = 0$, cuyas raíces son $x = -3, 5$.
Las ordenadas de los puntos de tangencia son $y = \frac{5}{2}$, $\frac{17}{2}$,
y las ecuaciones buscadas

$$\frac{y - \frac{5}{2}}{x+3} = -\frac{4}{3} \quad \text{o} \quad 8x + 6y + 9 = 0$$

$$\frac{y - \frac{17}{2}}{x-5} = -\frac{4}{3} \quad \text{o} \quad 8x + 6y - 91 = 0$$

PROBLEMA 7. Probar que si la recta $y = mx + b$ es tangente al círculo $x^2 + y^2 = r^2$, entonces se cumple la ecuación $b^2 = \left(1 + m^2\right)r^2$.

SOLUCION. Sea (x, y) el punto en el que la recta es tangente al círculo. Puesto que (x, y) se encuentra tanto en la recta como en el círculo se tienen las relaciones:

$$y_1 = mx_1 + b \qquad \textbf{(1)}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad \textbf{(2)}$$

La pendiente del segmento que une $(0, 0)$ con (x_1, y_1) es $\dfrac{y_1}{x_1}$. Y como la recta es perpendicular a dicho segmento su pendiente m será

$$m = \frac{-x_1}{y_1} \qquad \textbf{(3)}$$

De (3) se tiene $x_1 = -my_1$ y sustituyendo en (1) y (2) nos da

$$y_1 = -m^2 y_1 + b \qquad\qquad y_1\left(1 + m^2\right) = b$$

$$(-my_1)^2 + y_1^2 = r^2 \qquad\qquad y_1^2\left(1 + m^2\right) = r^2$$

Finalmente, eliminamos y_1 y obtenemos $b^2 = \left(1 + m^2\right) r^2$

1.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Determinar si la gráfica de las siguientes ecuaciones es un círculo, un punto o no posee puntos en el plano.

a) $x^2+y^2-2x+6y+9=0$

b) $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

c) $x^2+y^2+6x+2y+6=0$

d) $x^2+y^2-4x+4y+9=0$

e) $x^2+y^2+8x-8y+7=0$

f) $x^2+y^2-2ax+2ay+4a^2=0 \quad (a \in \mathbb{R})$

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(4a,3a)$, $(a,-6a)$, $(a,4a)$.

PROBLEMA 3. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(0,0)$, (a,b), $(c,0)$.

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de la recta tangente al círculo $x^2+y^2+2x+4y+20=0$ en el punto $(2,2)$.

PROBLEMA 5. Hallar la ecuación de la cuerda común de los dos círculos $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ y $x^2+y^2-4x+2y-7=0$.

PROBLEMA 6. Suponiendo que los círculos $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ y $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ tienen una cuerda común, probar que ésta tiene por ecuación

$$(d-D)x+(e-E)y+(f-F)=0 \ .$$

RESPUESTAS.

1. **a)** Un círculo **b)** Un punto **c)** Un círculo
d) No posee puntos **e)** Un círculo **f)** No posee puntos

2. $(x-a)^2+(y+a)^2 = 25a^2$

3. $\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{a^2+b^2-ac}{2b}\right)$

4. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$

5. $x-y+\frac{2}{3}=0$

Capítulo 2

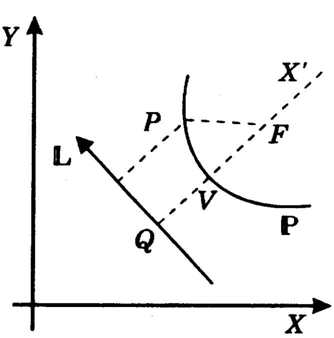
La Parábola

2.1 DEFINICION. Una parábola $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de una recta fija $\mathbb{L}$ y de un punto fijo F fuera de la recta. Así,

$$\mathbb{P} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \ / \ \text{distancia de } P \text{ a } \mathbb{L} = \text{ distancia de } P \text{ a } F \right\}$$

Supongamos que las coordenadas de los puntos P y F referidas al sistema cartesiano XY sean $P = (x, y)$ y $F = (f_1, f_2)$, y que la ecuación de la recta $\mathbb{L}$ sea $Ax + By + C = 0$. Entonces la ecuación de la parábola será:

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{(x - f_1)^2 + (y - f_2)^2}$$



En relación a la parábola, establecemos lo siguiente:

2.2 NOTACION

(1) Se llama *directriz de la parábola* a la recta $\mathbb{L}$.

(2) Se llama *foco de la parábola* al punto F.

(3) Se llama *eje de la parábola* a la recta X' que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

X' y $\mathbb{L}$ se intersecan en un punto Q, y el punto medio V del segmento $[Q, F]$ pertenece a la parábola.

(4) El punto $V = \frac{1}{2}(Q + F)$ recibe el nombre de *vértice de la parábola.*

2.3 ECUACION DE LA PARABOLA CON EJE PARALELO A UN EJE DE COORDENADAS

TEOREMA.

1) La ecuación de la parábola con vértice $V = (h, k)$ y eje paralelo al eje X es

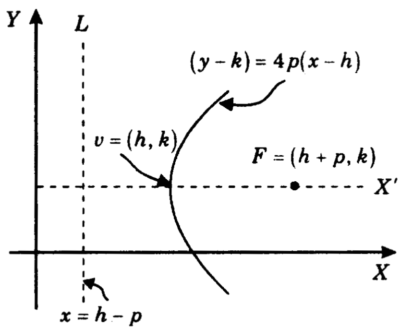
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

donde

P = abscisa del foco − abscisa del vértice.

En este caso, el foco es $F = (h + p, k)$

y la directriz L: $x = h - p$.



Parábola con eje paralelo al eje X

2) La ecuación de la parábola con vértice $V = (h, k)$ y eje paralelo al eje Y es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

donde, P =(ordenada del foco − ordenada del vértice).

En este caso, el foco es $F = (h, k + p)$ y la directriz es L: $y = k - p$

2.4 ECUACION VECTORIAL DE LA PARABOLA

Sea V el vértice y F el foco de una parábola $\mathbb{P}$. Consideremos un *sistema de coordenadas cartesianas* $X'Y'$ como sigue. Sean

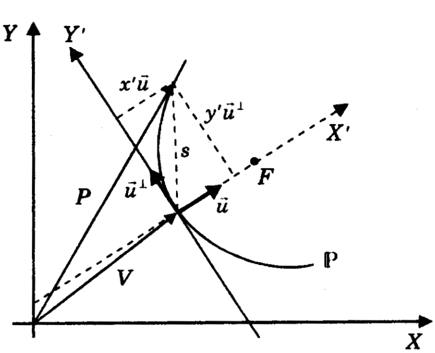
1) $\vec{u}$, un vector unitario paralelo al vector $F - V$.

Así, $\vec{u}$ puede ser $\dfrac{F-V}{|F-V|}$ o $-\dfrac{F-V}{|F-V|}$

2) $\vec{u}^{\perp}$, el vector ortogonal a $\vec{u}$.

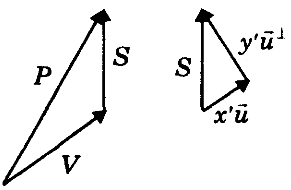
Así, si $\vec{u} = (a, b)$ entonces $\vec{u}^{\perp} = (-b, a)$.

Geométricamente, $\vec{u}^{\perp}$ se obtiene rotando el vector $\vec{u}$ un ángulo de 90° en el sentido antihorario.



3) p, el número real que cumple $F - V = p\vec{u}$.

4) $X'Y'$, el sistema de coordenadas cartesianas con origen en el vértice V, eje X' orientado en el sentido de $\vec{u}$ y eje Y', orientado en el sentido de $\vec{u}^{\perp}$



Observemos que si (x',y') son las coordenadas de un punto P del plano referidas al sistema $X'Y'$, entonces

$$P = V + x'\,\vec{u} + y'\,\vec{u}^{\perp}$$

En efecto, $P = V + S$ y $S = x'\,\vec{u} + y'\,\vec{u}^{\perp}$

Se cumple el siguiente

TEOREMA. Un punto P del plano se encuentra en la parábola $\mathbb{P}$ si y solamente si satisface la ecuación

$$P = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} \qquad \text{con } y'^2 = 4px', \quad x',y' \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente, si es de la forma

$$P = V + \frac{y'^2}{4p}\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} \qquad \text{con } y' \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

2.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación de la parábola con foco $F = (1, 1)$ y directriz L: $x + y + 2 = 0$.

SOLUCION. Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola. Se tiene entonces por definición

distancia de P a L = distancia de P a F

$$\frac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado $\quad \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y\right) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

resulta $\quad x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$

RESPUESTA. $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$.

PROBLEMA 2. Probar que la ecuación de la parábola con vértice $V = (h, k)$ y eje paralelo al eje X es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde

p = absisa del foco − abscisa del vértice

SOLUCION. El foco de la parábola es

$$F = (h + p, k) \tag{1}$$

En efecto,

$$\text{abscisa del foco} = p + \text{ abscisa del vértice} = p + h,$$

por definición de p,

y
$$\text{ordenada del foco} = \text{ordenada del vértice} = k,$$

pues el eje de la parábola es paralelo al eje X.

Por otra parte, la ecuación de la directriz L de la parábola es

$$L\colon\ x = h - p \tag{2}$$

En efecto, la directriz L es perpendicular al eje X y se halla a igual distancia del vértice que el foco de éste.

Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola.

Entonces por definición de parábola y empleando (1) y (2) se tiene

$$\text{distancia de } P \text{ a } L = \text{distancia de } P \text{ a } F$$

$$|x - h + p| = \left\{\left[x - (h + p)\right]^2 + (y - k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2xh + 2xp - 2hp = x^2 + h^2 + p^2 - 2xh - 2xp + 2hp + (y - k)^2$$

o también
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

PROBLEMA 3. Sea $P = V + \dfrac{t^2}{4p}\vec{u} + t\vec{u}^{\perp}$, $t \in \mathbb{R}$, la ecuación vectorial de la parábola. Hallar las ecuaciones paramétricas si $V = (h, k)$, $\vec{u} = (a, b)$, p, son dados.

SOLUCION. Se tiene
$$(x, y) = (h, k) + \frac{t^2}{4p}(a, b) + t(-b, a)$$

e igualando coordenadas

$$x = h + \frac{a}{4p}t^2 - bt \qquad\qquad y = k + \frac{b}{4p}t^2 + at$$

PROBLEMA 4. Se llama *lado recto* o *cuerda focal* de una parábola a la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola. Probar que la longitud del lado recto es $|4p|$.

SOLUCION. Consideremos la parábola con vértice $V=(0,0)$ y eje paralelo al eje X

$$y^2=4px$$

La recta $x=p$ corta a la parábola en los puntos $(p,2p)$ y $(p,-2p)$

En efecto, sustituyendo $x=p$

da $$y^2=4p^2 \quad \text{o} \quad y=\pm 2p$$

Luego

$$\begin{aligned}\text{longitud del lado recto} &= \text{distancia de } (p,2p) \text{ a } (p,-2p)\\ &= \sqrt{(p-p)^2+[2p-(-2p)]^2}\\ &= \sqrt{(4p)^2}=|4p|\end{aligned}$$

PROBLEMA 5. Un arco parabólico tiene 18 mts. de altura y 24 mts. de ancho en la base. Si la parte superior del arco es el vértice de la parábola, ¿a qué altura sobre la base tiene la parábola un ancho de 16 metros?

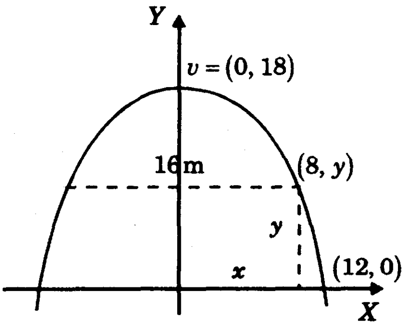
SOLUCION. Sea $V=(0,18)$ el vértice de la parábola con eje Y.

Entonces la ecuación de la parábola es

$$(x-0)^2=4p(y-18)$$

El punto $(12,0)$ se halla en la parábola y sustituyendo las coordenadas en la ecuación calculamos p

$$\begin{aligned}12^2 &= 4p(0,18)\\ p &= -2\end{aligned}$$



La altura buscada es la ordenada del punto $(8,y)$ de la parábola.

Se tiene $\quad 8^2 = -8(y-18)\ , \quad y=10$

RESPUESTA. A una altura de 10 metros.

PROBLEMA 6. Si $L=(-9,3)$ y $R=(-1,-5)$ son los extremos del lado recto de una parábola, hallar la ecuación de la parábola.

SOLUCION. Calcularemos el foco F y la directriz L de la parábola y aplicaremos la definición para hallar la ecuación.

Como el foco F es el punto medio del lado recto LR se tiene,

$$F = \tfrac{1}{2}(L+R) = \tfrac{1}{2}[(-9,3)+(-1,-5)] = \tfrac{1}{2}(-10,-2) = (-5,-1)$$

Por otra parte, por el problema 4, podemos calcular $|p|$ como sigue

$$|4p| = \text{longitud del lado recto} = \sqrt{(-9+1)^2+(3+5)^2} = 8\sqrt{2}$$

de donde $$|p| = 2\sqrt{2}.$$

La ecuación de la recta L' que contiene al lado recto es

$$\frac{y-(-5)}{x-(-1)} = \frac{(3)-(-5)}{(-9)-(-1)} = -1 \quad \text{o} \quad L': x+y+6=0.$$

Los puntos (x, y) de la directriz L de la parábola son aquellos que se encuentran a una distancia $2|p| = 4\sqrt{2}$ de la recta L', de modo que (x,y) satisface

$$\frac{|x+y+6|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x+y+6=\pm 8$$

De esta manera, vemos que hay dos posibles directrices

$$L_1: x+y-2=0 \quad \text{y} \quad L_2: x+y+14=0$$

y por consiguiente hay dos parábolas

$$\mathbb{P}_1: \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_2: \frac{|x+y+14|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2}$$

Elevando al cuadrado y efectuando las reducciones convenientes en cada caso, se obtiene

$$\mathbb{P}_1: x^2-2xy+y^2+24x+8y+48 = 0$$

y

$$\mathbb{P}_2: x^2-2xy+y^2-8x-24y-144 = 0$$

RESPUESTA. Hay dos soluciones:

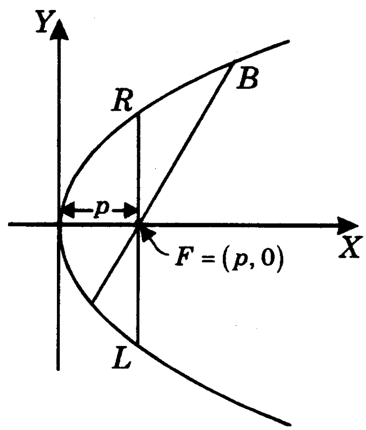
$$x^2-2xy+y^2+24x+8y+48 = 0$$
$$x^2-2xy+y^2-8x-24y-144 = 0$$

PROBLEMA 7. Hallar la pendiente del ángulo que forma la cuerda que pasa por el foco de la parábola $y^2 = 4px$ con el eje de ésta, para que la longitud de la cuerda sea 3 veces el lado recto.

SOLUCION. Sea AB la cuerda focal que tiene una longitud $3|4p| = 12|p|$. Si m es la pendiente de AB, entonces la ecuación de AB es

$$\frac{y-0}{x-p} = m \quad \text{o} \quad y = mx - mp$$

Calculando los puntos A y B en los cuales la cuerda corta a la parábola, sustituimos $y = mx - mp$ en la ecuación $y^2 = 4px$



$$(mx - mp)^2 = 4px$$

o $$m^2x^2 - 2p(m^2 + 2)x + m^2p^2 = 0$$

y resolviendo esta ecuación de segundo grado en x, obtenemos las abscisas de A y B

$$x = \frac{2p(m^2 + 2) \pm \sqrt{4p^2(m^2 + 2)^2 - 4m^4p^2}}{2m^2}$$

o $$x = \frac{p(m^2 + 2) \pm 2|p|\sqrt{m^2 + 1}}{m^2}$$

Supongamos que $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$

con $x_0 = \dfrac{p(m^2 + 2) - 2|p|\sqrt{m^2 + 1}}{m^2}$ y $x_1 = \dfrac{p(m^2 + 2) + 2|p|\sqrt{m^2 + 1}}{m^2}$

se tiene entonces $$x_1 - x_0 = \frac{4|p|\sqrt{m^2 + 1}}{m^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Por otra parte, $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_0}$$

da $$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0) \qquad \textbf{(2)}$$

Finalmente, $$12|p| = \text{longitud de } AB = \sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}$$

$$= \sqrt{m^2(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}\ , \quad \text{por (2)}$$

$$= \sqrt{1 + m^2}\ .\ |x_1 - x_0| = \sqrt{1 + m^2}\ .\ \frac{4|p|\sqrt{1 + m^2}}{m^2}\ , \qquad \text{por (1)}$$

$$= \frac{4|p| \cdot (1 + m^2)}{m^2}$$

o también $3m^2 = 1 + m^2$

y resolviendo $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

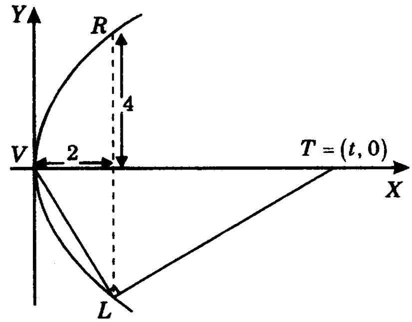
RESPUESTA. $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 8. El vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo es el extremo L del lado recto LR de la parábola $y^2 = 8x$. El segundo vértice del triángulo es el vértice de la parábola. ¿Cuál es el tercer vértice del triángulo y cuánto vale la hipotenusa, si se sabe que ésta se encuentra sobre el eje X?

SOLUCION. Sea $T = (t, 0)$ el tercer vértice. Se sabe que

$$V = (0,0) \qquad L = (2,-4)$$

La pendiente del lado VL es $\dfrac{-4-0}{2-0} = -2$, y por lo tanto la recta LT que es perpendicular a VL tiene ecuación



$$\frac{y-(-4)}{x-2} = \frac{1}{2}$$

o $$y = \tfrac{1}{2}x - 5$$

Esta recta corta al eje X en $T = (t, 0)$.

Sustituyendo las coordenadas del punto T en la ecuación, para obtener t

$$0 = \tfrac{1}{2}t - 5$$

da $t = 10$, y longitud de $VT = 10$

RESPUESTA. El tercer vértice es $(10, 0)$ y la longitud de la hipotenusa 10.

PROBLEMA 9. Un proyectil describe una curva parabólica alrededor de un punto F, siendo éste el foco de la parábola. Cuando el proyectil está a 10 Kms. de F, el segmento de recta de F al proyectil hace un ángulo de 60° con el eje de la parábola.

1) Hallar la ecuación de la parábola.

2) ¿Qué tan cerca de F pasa el proyectil?

SOLUCION. Sean $V = (0,0)$ el vértice de la parábola,
$F = (p, 0)$ el foco,
y L: $x = -p$ la directriz.

Calcularemos p. Por definición de parábola se tiene para el punto P

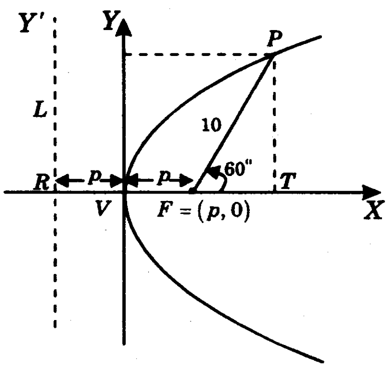
$$\text{distancia de } P \text{ a } F = \text{distancia de } P \text{ a } L$$
$$10 = \text{distancia de } P \text{ a } L$$

por otra parte, de la figura se tiene

distancia de P a L =

$= |V - R| + |F - V| + |T - F|$

$= p + p + 10\cos 60^{\circ}$



Luego $\qquad 10 = 2p + 10 \times \frac{1}{2}$

y $\qquad p = \frac{5}{2}.$

La ecuación buscada es entonces

$$y^2 = 10\left(x - \tfrac{5}{2}\right).$$

Finalmente,

menor distancia de P a F = menor distancia de P a L

$= p = 5/2$

RESPUESTA. 1) $y^2 = 10\left(x - \frac{5}{2}\right)$ $\qquad$ **2)** 5/2 Km

PROBLEMA 10. El agua que fluye de un grifo horizontal que está a 25 mts. del piso describe una curva parabólica con vértice en el grifo. Si a 21 mts. del piso, el flujo del agua se ha alejado 10 mts. de la recta vertical que pasa por el grifo, ¿a qué distancia de esta recta vertical tocará el agua al suelo?

SOLUCION. Sea $V = (0, 25)$ el vértice de la parábola.

La ecuación de la parábola es $\quad (x - 0)^2 = 4p(y - 25)$

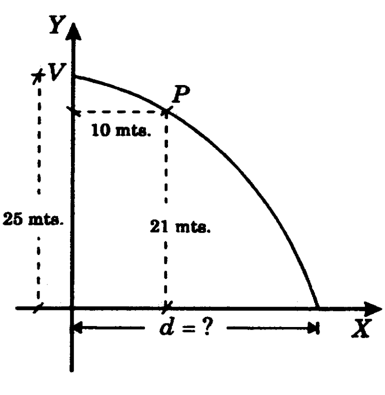
Puesto que el punto $P = (10, 21)$ se encuentra en la parábola se cumple

$$10^2 = 4p(21 - 25)$$

o $$p = -25/4$$

Para calcular la distancia d bastará sustituir las coordenadas del punto $(d, 0)$ en la ecuación hallada

$$d^2 = -25\,(0 - 25) \quad \Rightarrow \quad d = \pm 25$$



RESPUESTA. A 25 mts. de la recta vertical.

PROBLEMA 11. Hallar todos los puntos de la parábola $y^2 = 4px$ tales que el pie de la perpendicular trazada del punto a la directriz, el foco y el punto mismo sean vértices de un triángulo equilátero.

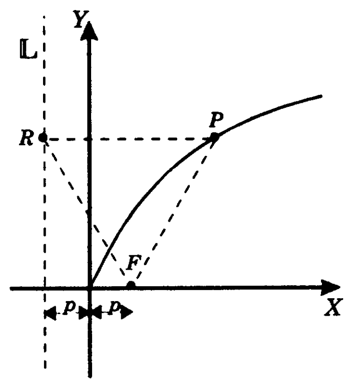
SOLUCION. Para que P, R y F sean los vértices de un triángulo equilátero deberá cumplirse

$$|R-F| = |P-R| \tag{1}$$

puesto que $|P-R| = |P-F|$, por definición de parábola.

Se tiene $P=(x,y)$ con $y^2 = 4px$,
$R=(-p,y)$ y $F=(p,0)$

Luego sustituyendo en (1)



$$|(-p,y)-(p,0)| = |(x,y)-(-p,y)|$$

$$\left(4p^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{(x+p)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$4p^2+y^2 = x^2+2px+p^2$$

o $$x^2-2px-3p^2=0,$$

que resuelta da $x=3p, -p$

La solución $x=-p$ se descarta, pues $y^2=-4p^2$ es imposible ya que $y^2 \geq 0$.

Luego $x=3p$, $y=\pm 2\sqrt{3}p$.

RESPUESTA. $(3p, -2\sqrt{3}\,p)$ y $(3p, 2\sqrt{3}\,p)$

2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Hallar la mínima distancia entre los puntos de la parábola $y^2 = x-1$ y la recta $y=\frac{1}{2}x+3$. ¿En qué punto de la parábola, la distancia a la recta es mínima?

PROBLEMA 2. Determinar la ecuación de la parábola de foco $(0,0)$ y directriz $y=x+2$.

PROBLEMA 3. Sea la parábola $y^2 = 4x+5$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,-3)$ de la parábola y que no corta a ésta en ningún punto. (Dicha recta recibe el nombre de tangente de la parábola en el punto dado).

Sugerencia. Si $\dfrac{y+3}{x-1}=m$ es la ecuación de la recta, se sustituye x en la ecuación de la parábola, resultando entonces una ecuación de segundo grado en y. Para que la intersección de la recta con la parábola sea exactamente un punto, la ecuación resultante debe tener una sola raíz, y esto es cierto solamente si el discriminante de la ecuación es 0. Finalmente, la ecuación del discriminante permite obtener el valor de m.

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de una parábola que pasa por los puntos $(0,0)$ y $\left(0,\frac{80}{9}\right)$, y cuyo eje principal se encuentra sobre la recta $y=\frac{4}{3}x$.

RESPUESTAS.

1. Distancia mínima $=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

2. $x^2+y^2+2xy-4x+4y-4=0$

3. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

4. $16x^2-24xy+9y^2-60x-80y=0$

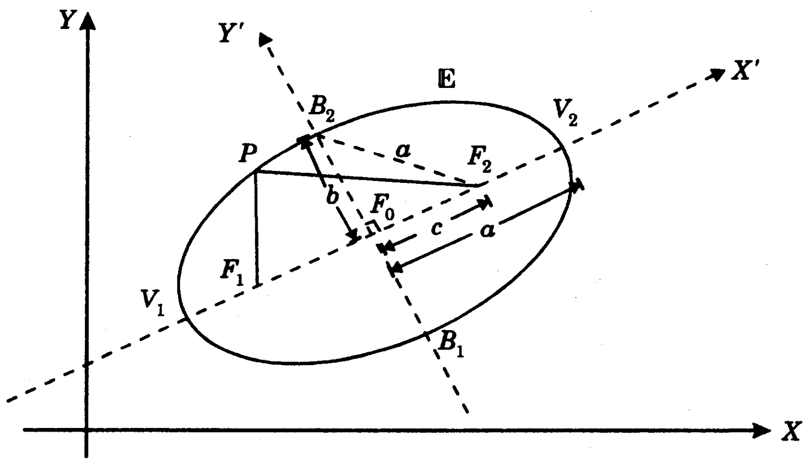
Capítulo 3

La Elipse

3.1 DEFINICION. Una *elipse* $\mathbb{E}$ es el conjunto de los puntos del plano euclideano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es una constante.

Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ y a un número real positivo. Entonces

$$\mathbb{E} = \{P = (x, y) \;/\; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$



3.2 NOTACION Y PROPIEDADES

1. Los puntos F_1 y F_2 se denominan *focos de la elipse.*

2. El punto medio $F_0 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro de la elipse.*

3. Si $F_1 \neq F_2$, la elipse corta la recta X' que pasa por F_1 y F_2 en exactamente dos puntos V_1 y V_2, que reciben el nombre de *vértices de la elipse.* Se demuestra que

$$d(V_1, F_0) = d(V_2, F_0) = a$$
$$d(F_1, F_0) = d(F_2, F_0) = c$$

y que $\qquad 0 < c < a.$

El segmento $\overline{V_1V_2}$ se llama *eje mayor* de la elipse y tiene longitud $2a$. El número a se llama *semieje mayor.*

4. Si $F_1 \neq F_2$, la elipse corta la recta Y' que pasa por F_0 y es perpendicular al eje mayor en exactamente dos puintos B_1 y B_2. Se demuestra que

$$d(B_1, F_0) = d(B_2, F_0)$$

y que $\qquad b^2 + c^2 = a^2$

El segmento $\overline{B_1B_2}$ se llama *eje menor de la elipse* y tiene longitud $2b$. El número b se llama *semieje menor.*

5. El número $e = \dfrac{c}{a}$ se llama *excentricidad de la elipse.* Es fácil de ver que $0 \leq e \leq 1$.

3.3 ECUACIONES DE LA ELIPSE CON EJE PARALELO A UN EJE DE COORDENADAS CARTESIANAS.

TEOREMA.

1. La ecuación de una elipse cuyo eje mayor es paralelo el eje X es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b,$$

en donde se tiene que

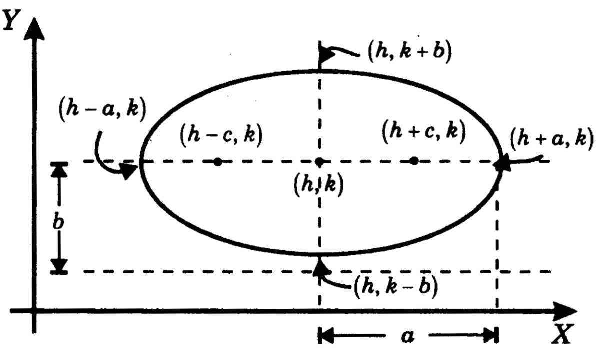
$$\begin{cases} \text{centro de la elipse:} & (h, k) \\ \text{vértices de la elipse:} & (h-a, k) \text{ y } (h+a, k) \\ \text{focos de la elipse:} & (h-c, k) \text{ y } (h+c, k),\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

2. La ecuación de una elipse cuyo eje mayor es paralelo al eje Y es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad \text{con } a>b,$$

en donde se tiene que

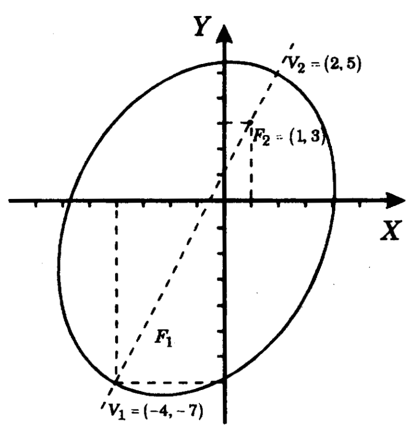
$$\begin{cases} \text{centro de la elipse:} & (h,k) \\ \text{vértices de la elipse:} & (h,k-a) \ \text{ y } \ (h,k+a) \\ \text{focos de la elipse:} & (h,k-c) \ \text{ y } \ (h,k+c),\ c=\sqrt{a^2-b^2} \end{cases}$$



Elipse con eje paralelo al eje *X*

3.4 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar una ecuación de la elipse con vértices $(-4,-7)$ y $(2,5)$ y uno de los focos en $(1,3)$.



SOLUCION. Representamos gráficamente

$$\begin{aligned} \text{los vértices } V_1 &= (-4,-7) \\ \text{y } V_2 &= (2,5) \\ \text{y el foco } F_2 &= (1,3) \end{aligned}$$

Debemos calcular la longitud $2a$ del eje mayor y el foco F_1.

Se tiene $$2a = d(V_1, V_2) = \sqrt{[2-(-4)]^2 + [5-(-7)]^2} = \sqrt{180}$$

Los vectores $F_1 - V_1$ y $V_2 - F_2$ son paralelos y tienen igual longitud pues
$$d(V_1, F_1) = d(V_2, F_2)$$

Por consiguiente, son iguales y se cumple
$$F_1 - V_1 = V_2 - F_2$$

o $$F_1 = V_1 + V_2 - F_2 = (-4, -7) + (2, 5) - (1, 3)$$

y así $$F_1 = (-3, -5).$$

Designemos con $P = (x, y)$ un punto arbitrario de la elipse. Por definición se debe verificar $$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

o $$\sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{180}.$$

Y eliminando los radicales del primer miembro
$$\left[\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{180} - \sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2}\right]^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 = 180 - 2\sqrt{180}.\sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25$$
$$\left[2\sqrt{180}.\sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2}\right]^2 = [8x + 16y + 195]^2$$

se obtiene
$$720\left(x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25\right) = 64x^2 + 216y^2 + 38025 + 216xy + 3120x + 6240y$$

o $$656x^2 + 504y^2 - 216xy + 1200x + 960y - 13545 = 0$$

RESPUESTA. La ecuación buscada es
$$656x^2 + 504y^2 - 216xy + 1200x + 960y - 13545 = 0$$

PROBLEMA 2. Demostrar que $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $a > b$, es la ecuación de una elipse con centro (h, k) y eje mayor paralelo al eje X. Probar que

a = semieje mayor, b = semieje menor

$(h-a, k)$, $(h+a, k)$ son los vértices de la elipse,

$(h-c, k)$, $(h+c, k)$ son los focos de la elipse,

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

SOLUCION. Puesto que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje X, los focos F_1, F_2 y el centro (h, k) tienen igual ordenada k.

Siendo el centro el punto medio de los focos tenemos

$$F_1 = (h - c, k) \qquad \text{y} \qquad F_2 = (h + c, k), \quad \text{con } c > 0.$$

Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse se debe cumplir

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad , a > 0 \tag{1}$$

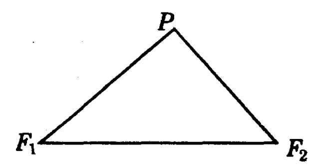
Observemos que (1) implica que $\qquad c \leq a \qquad$ **(2)**

En efecto, por la desigualdad triangular

$$2c = d(F_1, F_2) \leq d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

para cualquier punto de la elipse. Así $c \leq a$.

Volviendo a la ecuación (1) podemos escribir



$$\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - h)^2} + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

Desarrollando

$$\left[\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2}\right]^2$$

$$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$$

$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = a^2 - c(x-h)$$

$$\left[a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2}\right]^2 = \left[a^2 - c(x-h)\right]^2$$

$$a^2\left[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2\right] = a^4 - 2ca^2(x-h) + c^2(x-h)^2$$

da $$\left(a^2 - c^2\right)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

De (2) se tiene $c^2 \leq a^2$ y podemos hacer $b^2 = a^2 - c^2 \geq 0$, con $b \geq 0$.

La última ecuación se convierte en $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$, y si $b > 0$, dividiendo por a^2b^2 se obtiene $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$

Hallaremos los vértices del eje mayor. La recta L que contiene al eje mayor es $y = k$. Por lo tanto, haciendo $y = k$ en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = h \pm a,$$

y así, $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$ son los vértices de la elipse.

Puesto que por definición se tiene

$$\text{semieje mayor} = \frac{1}{2} d(V_1, V_2) = \frac{2a}{2} = a$$

vemos que a es el semieje mayor.

De igual modo, la recta que contiene al eje menor es $x = h$. Por lo tanto, haciendo $x = h$ en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = k \pm b,$$

y así $\qquad B_1 = (h, k - b)$ y $B_2 = (h, k + b)$

son los extremos del eje menor.

Luego se tiene $\qquad \text{semieje menor} = \dfrac{1}{2} d(B_1, B_2) = \dfrac{2b}{2} = b$

PROBLEMA 3. Hallar una ecuación de la elipse con centro en $(0, 1)$, sus focos en el eje Y, y la longitud del eje mayor igual a $5/3$ veces la longitud del eje menor y que pasa por el punto $(-12/5, 4)$.

SOLUCION. Designaremos con a y b las longitudes de los semiejes mayor y menor, respectivamente. Se tiene entonces que

$$a = \tfrac{5}{3} b \qquad \textbf{(1)}$$

Puesto que se trata de una elipse con eje paralelo al eje Y y centro en $(0, 1)$, la ecuación buscada es de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-1)^2}{a^2} = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Debemos determinar a y b.

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene $\qquad \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{(y-1)^2}{\dfrac{25b^2}{9}} = 1,$

y como el punto $(-12/5, 4)$ se encuentra en la elipse

$$\frac{144}{25b^2} + \frac{3^2}{\frac{25b^2}{9}} = 1 \ ,$$

o $\qquad 25b^2 = 144 + 81$

$\qquad b = 3$

y de aquí $\qquad a = \frac{5}{3}b = \frac{5}{3} \times 3 = 5.$

RESPUESTA. La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1.$

PROBLEMA 4. Sean e un número real $0 < e < 1$, F un punto fijo y L una recta que no contiene a F.

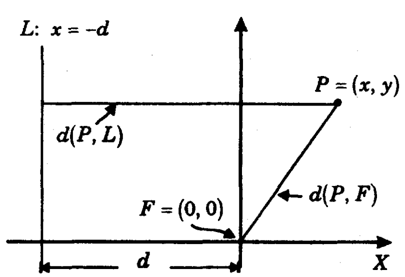
1) Probar que los puntos P del plano cuya distancia del punto F es e veces la distancia de la recta L forman una elipse.

2) Si a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente, y si $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, probar que $c = ea$.

Nota. Llamamos *foco* al punto F, *excentricidad* al número e, y *directriz* a la recta L.

SOLUCION.

1) Consideramos un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el punto F tal que el eje X sea perpendicular a la recta L y orientamos X positivamente en el sentido de la recta L al punto F.



Se tiene así $\quad F = (0,0)$, $L : x = -d$,

donde $\quad d = d(F, L)$.

Designemos con $P = (x, y)$ un punto tal que $\quad d(P, F) = e\,d(P, L)$.

Se tiene entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|x + d|$$

$$\left(x^2 + y^2\right) = e^2(x+d)^2 = e^2\left(x^2 + 2xd + d^2\right)$$

o $\qquad \left(1-e^2\right)x^2 - 2e^2 d\,x + y^2 = e^2 d^2$

$$\left(1-e^2\right)\left[x^2 - \frac{2e^2 d\,x}{1-e^2}\right] + y^2 = e^2 d^2$$

Sumando $\dfrac{e^4 d^2}{1-e^2}$ en ambos miembros para completar cuadrados en los corchetes,

se tiene $\qquad \left(1-e^2\right)\left[x - \dfrac{e^2 d}{1-e^2}\right]^2 + y^2 = e^2 d^2 + \dfrac{e^4 d^2}{1-e^2} = \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}$

y dividiendo ambos miembros entre $\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}$

$$\frac{\left[x - \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}\right]^2}{\dfrac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1.$$

Puesto que $0 < e < 1$ implica $e^2 < 1$ y $1-e^2 > 0$, ambos denominadores son positivos y la ecuación es, en verdad, la de una elipse con centro en

$\left(\dfrac{e^2 d}{1-e^2}, 0\right)$ y ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

2) Siendo $0 < e^2 < 1$ se obtiene $\quad 1-e^2 < 1$

$$\left(1-e^2\right)^2 < \left(1-e^2\right)$$

$$\frac{1}{1-e^2} < \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}$$

$$\frac{e^2 d^2}{1-e^2} < \frac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}$$

Así, si a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente, se cumple

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} \qquad \text{y} \qquad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$$

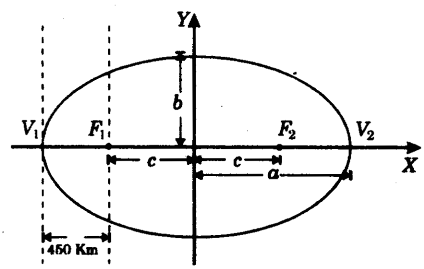
$$\text{Luego} \qquad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = \frac{e^4d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2 \times \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2a^2,$$

y $\qquad c = ea$

PROBLEMA 5. Un satélite se mueve alrededor de la tierra describiendo una órbita elíptica, donde la tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{3}$.

La distancia más corta a la tierra es 450 Kms.

Hallar la distancia más grande a la que se aleja el satélite de la tierra.



SOLUCION. Sean $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ los focos de la elipse y la tierra ubicada en el foco F_1 (Ver figura). Designaremos con a y b los semiejes mayor y menor, respectivamente.

Es claro que $\qquad$ distancia más corta $= d(F_1, V_1) = a - c = 450 \qquad$ **(1)**

$\qquad$ distancia máxima $= d(F_1, V_2) = a + c \qquad$ **(2)**

Debemos calcular $\quad d(F_1, V_2) = a + c$

Por el problema 4 ,si e es la excentricidad se tiene $c = ea$.

Sustituyendo $e = \frac{1}{3}$ obtenemos $\qquad a = 3c \qquad$ **(3)**

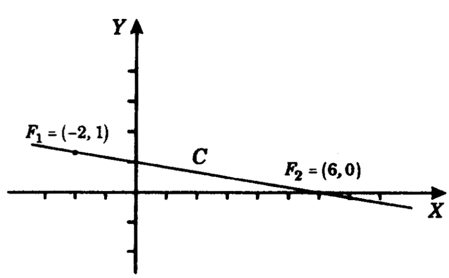
Resolviendo (1) y (3) $\qquad \begin{cases} a - c = 450 \\ a = 3c \end{cases}$

da $\; c = 225$.

Finalmente de (2) $\qquad d(F_1, V_2) = a + c = 4c = 4 \times 225 = 900\,\text{Km}.$

RESUESTA. 900 Kms.

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de la elipse con focos $(-2, 1)$ y $(6, 0)$ y excentricidad $e = \dfrac{\sqrt{65}}{10}$



SOLUCION. Designemos con C el centro de la elipse, V_1 y V_2 los vértices y $F_1 = (-2, 1)$ y $F_2 = (6, 0)$, los focos de la elipse.

Puesto que F_1 y F_2 son dados necesitamos calcular $2a = d(V_1, V_2)$.
Si $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$ entonces

$$c = \tfrac{1}{2}d(F_1, F_2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(6+2)^2 + (0-1)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{65} \qquad (1)$$

Y por el problema 4 , $\qquad c = ea \qquad$ **(2)**

De (1) y (2) y $e = \sqrt{65}/10$ se obtiene $a = 5$

Si $P = (x, y)$ pertenece a la elipse se debe cumplir

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 10$$

Eliminando radicales se obtiene

$$\left[\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}\right]^2 = \left[10 - \sqrt{(x-6)^2 + y^2}\right]^2$$

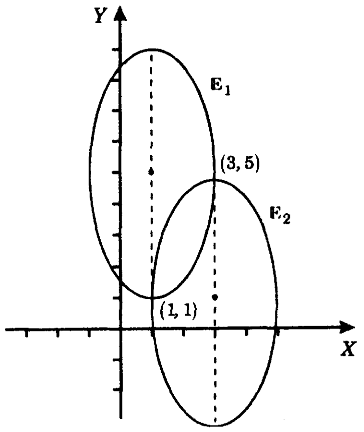
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 100 - 20\sqrt{(x-6)^2 + y^2} + x^2 - 12x + 36 + y^2$$

$$16x - 2y - 131 = -20\sqrt{(x-6)^2 + y^2}$$

$$[16x - 2y - 131]^2 = 400\left[(x-6)^2 + y^2\right]$$

o $\quad 144x^2 + 396y^2 + 64xy - 524y + 1792x - 2761 = 0$

PROBLEMA 7. Hallar la ecuación de cada elipse con un vértice en $(1, 1)$ y un vértice en $(3, 5)$ si el eje mayor es vertical.



SOLUCION. Sean $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ las elipses cuyas ecuaciones se trata de hallar. Las ecuaciones buscadas son de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{con } a > b$$

Para $\mathbb{E}_1$ se tiene $\qquad$ centro: $(1, 5)$

$a = 5 - 1 = 4$

$b = 3 - 1 = 2$ y así, $\mathbb{E}_1: \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$

Para $\mathbb{E}_2$ se tiene centro: $(3, 1)$

$a = 5 - 1 = 4$

$b = 3 - 1 = 2$ y así, $\mathbb{E}_2 : \dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

RESPUESTA. Las ecuaciones son $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$ y $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

PROBLEMA 8. La cuerda de una elipse a través de un foco y perpendicular al eje mayor se llama *lado recto o cuerda focal.* Probar que la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

SOLUCION. Consideremos la ecuación de una elipse centrada en el origen y eje mayor paralelo al eje X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

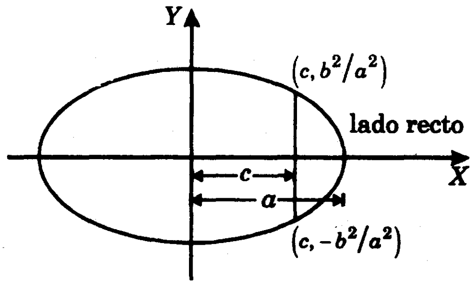
Los extremos de un lado recto tienen abscisas $x = \pm c$ y ordenadas y:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right),$$

donde $a^2 = b^2 + c^2$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - c^2\right) = \frac{b^4}{a^2}$$

o $\quad y = \pm\dfrac{b^2}{a}$.



Así $\left(c, -\dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(c, \dfrac{b^2}{a}\right)$ son los extremos de un lado recto.

Luego, la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

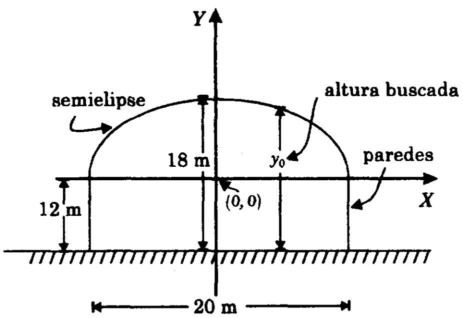
PROBLEMA 9. Un techo de 20 mts. de ancho tiene la forma de una semielipse. ¿Cúal es la altura del techo a 4 mts. de las paredes laterales, si éste tiene una altura de 18 mts. en el centro y de 12 mts. en las paredes?

SOLUCION. Consideramos un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el centro de la elipse. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se tiene $a = 10$ y $b = 18 - 12 = 6$.

Luego $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1.$



A 4 mts. de distancia de la pared, la abscisa tiene valor $x_0 = 10 - 4 = 6$ y la ordenada correspondiente y_0 en la elipse cumple $\dfrac{6^2}{100} + \dfrac{y_0^{\,2}}{36} = 1$ de donde $y_0 = 4.8$.

Luego, la altura buscada es

$$y_0 + 12 = 4.8 + 12 = 16.8$$

RESPUESTA. El techo tiene 16.8 mts. de altura a 4 metros de las paredes laterales.

3.5 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación de la elipse con focos en $(0, 0)$ y $(0, 8)$ y semieje menor 3.

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación de la elipse con centro en $(-1, 1)$, semieje mayor 3 y excentricidad 2/3 si el eje mayor es horizontal.

PROBLEMA 3. Un arco tiene la forma de una semielipse. ¿Qué tan ancho es el arco a una altura de 6 m sobre la base, si éste tiene 32 m de ancho en la base y una altura de 12 m?

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $(-1, -1)$ y $(3, 3)$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 5. Una elipse con centro en el origen tiene un vértice en $(-4, 3)$. Hallar la ecuación de la elipse si la longitud del lado recto es 15/2.

Nota. Lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$, por el problema 8, 3.4.

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $(2,0)$ y $(2,6)$ y uno de los focos en $(2,5)$.

PROBLEMA 7. Hallar una ecuación de la elipse con centro en $(6,1)$, vértice en $(0,-5)$ y un foco en el eje X.

RESPUESTAS.

1. $\dfrac{(y-4)^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1.$

2. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1.$

3. $16\sqrt{3}$

4. $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 36 = 0.$

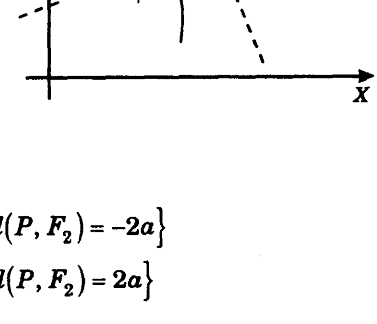
5. $84x^2 + 391y^2 + 24xy - 1875 = 0$; focos $\left(2, -\frac{3}{2}\right), \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

6. $\dfrac{(x-2)^2}{5} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1.$

7. $71x^2 + 71y^2 - 2xy - 850 - 130y - 2425 = 0$

Capítulo 4

La Hipérbola



4.1 DEFINICION. Una *hipérbola* es el conjunto de todos los puntos del plano euclideano $\mathbb{R}^2$ tales que que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es en valor absoluto una constante.

Así, si F_1 y F_2 son dos puntos fijos de $\mathbb{R}^2$ y a es un real positivo, se tiene

$$\mathbb{H} = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a\}$$

Una hipérbola se compone de dos *ramas* $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ definidas por

$$\mathbb{H}_1 = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a\}$$
$$\mathbb{H}_2 = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a\}$$

4.2 NOTACION Y PROPIEDADES

1. Los puntos F_1 y F_2 se llaman *focos de la hipérbola*.
2. El punto medio $F_0 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro de la hipérbola*.

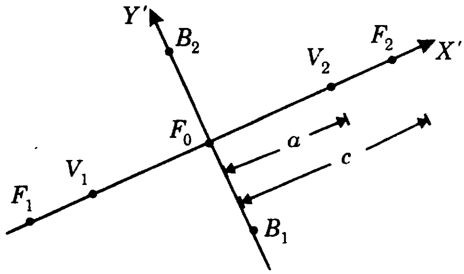
3. La hipérbola H corta la recta X' que pasa por los focos en exactamente dos puntos V_1 y V_2 que se llaman *vértices de la* hipérbola. Se cumple

$$d(V_1, F_0) = d(V_2, F_0 = a)$$

El segmento $\overline{V_1V_2}$ se llama *eje transversal* y posee longitud $2a$.

4. Si $c = d(F_1, F_0) = d(F_2, F_0)$ entonces $c > a$.

Hagamos $b^2 = c^2 - a^2$ y designemos por Y' la recta que pasa por F_0 y es perpendicular a X'. Sean B_1 y B_2 los puntos de Y' que distan b de F_0.



Se tiene $d(B_1, F_0) = d(B_2, F_0) = b$

El segmento $\overline{B_1B_2}$ se llama *eje conjugado* y tiene longitud $2b$.

5. Los números a y b se denominan *semieje transversal* y *conjugado*, respectivamente.

El número $e = \dfrac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la hipérbola. Observemos que $e > 1$.

6. Decimos que una hipérbola es *equilátera* si $a = b$, es decir si los semiejes transversal y conjugado son iguales.

Empleando la relación $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, es fácil de ver que una hipérbola es equilátera si y solamente si $e = \sqrt{2}$.

4.3 ECUACION DE LA HIPERBOLA CON EJE TRANSVERSAL PARALELO A UN EJE DE COORDENADAS CARTESIANAS

TEOREMA.

1) La ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje X es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Y donde se tiene que
$$\begin{cases} \text{centro de la hipérbola:} & (h, k) \\ \text{vértices de la hipérbola:} & (h, k) \text{ y } (h + a, k) \\ \text{focos de la hipérbola:} & (h - c, k) \text{ y } (h + c, k);\ c = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

2) La ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje Y es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Y donde se tiene que } \begin{cases} \text{centro de la hipérbola:} & (h, k) \\ \text{vértices de la hipérbola:} & (h, k-a) \text{ y } (h, k+a) \\ \text{focos de la hipérbola:} & (h, k-c) \text{ y } (h, k+c);\ c = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Asíntotas de la Hipérbola

1. Se llaman asíntotas *de la hipérbola* $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\text{a las rectas } \begin{cases} L_1\text{: } y = k + \dfrac{b}{a}(x-h) \\ L_2\text{: } y = k - \dfrac{b}{a}(x-h) \end{cases}$$

que se obtienen igualando a cero el segundo miembro de la ecuación de la hipérbola. Así, los puntos de las asíntotas son aquellos que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

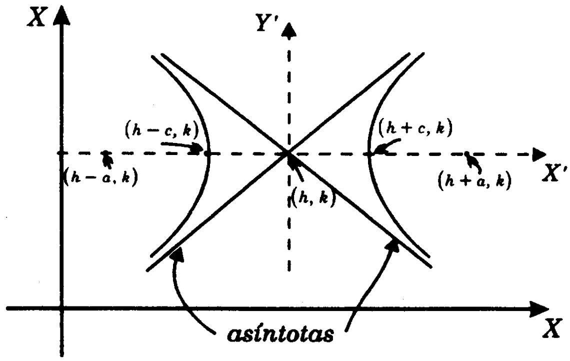
Las asíntotas L_1 y L_2 son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola y forman con el eje transversal de ésta un ángulo α con $\operatorname{tg}\alpha = \pm b/a$.

Propiedad de las Asíntotas. Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces la distancia de P a la asíntota más próxima tiende hacia cero a medida que $|x|$ crece indefinidamente (ver problema resuelto Nº 10).

2. De igual modo se llaman *asíntotas de la hipérbola* $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$$\text{a las rectas } \begin{cases} L_1\text{: } y = k + \dfrac{a}{b}(x-h) \\ L_2\text{: } y = k - \dfrac{a}{b}(x-h) \end{cases}$$

que se obtienen igualando a cero el segundo miembro de la ecuación de la hipérbola.



Hipérbola con eje transversal paralelo al eje X

4.4 HIPERBOLAS CONJUGADAS

Decimos que dos hipérbolas son *conjugadas* si tienen los ejes transversales y conjugados intercambiados.

En forma explícita, las hipérbolas H y H' son conjugadas si se cumple

$$\begin{cases} \overline{V_1V_2} = \text{eje transversal de } H = \text{eje conjugado de } H' \\ \qquad \text{y} \\ \overline{B_1B_2} = \text{eje conjugado de } H = \text{eje transversal de } H' \end{cases}$$

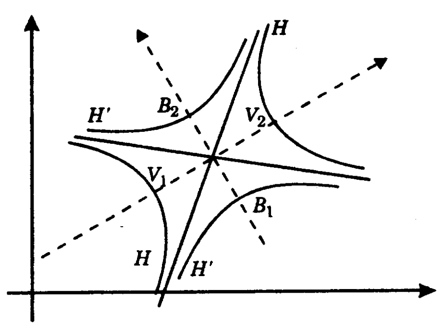
Por ejemplo, las hipérbolas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y $$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

son conjugadas.

Dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.



Hipérbolas conjugadas

4.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 255$ y cuyos vértices son los focos de la elipse.

SOLUCION. De la ecuación de la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

obtenemos $a^2=25,\ b^2=9$ y $c^2=16$.

Por lo tanto, vértices de la elipse: $(0,-5),(0,5)$;

focos de la elipse: $(0,-4),\ (0,4)$;

Luego se tiene focos de la hipérbola: $(0,-5),(0,5)$;

vértices de la hipérbola: $(0,-4),(0,4)$;

centro de la hipérbola: $(0,0)$.

La ecuación tiene la forma

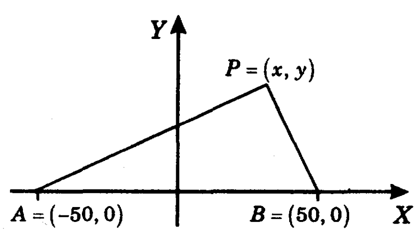
$$\frac{y^2}{A^2}-\frac{x^2}{B^2}=1$$

donde $A=4,\ C=5$ y $B=\sqrt{C^2-A^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

Se sigue entonces que $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ es la ecuación requerida.

RESPUESTA. $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

PROBLEMA 2. El costo de producción de un artículo es \$12 menos por unidad en un punto A que en un punto B. Si la distancia de A a B es de 100 Kms., la ruta de entrega está a lo largo de una línea recta y el transporte cuesta \$0.20 por unidad por Km; ¿cuál es la curva en cualquier punto de la cual cueste lo mismo un artículo transportado desde A o B?



SOLUCION. Tracemos un sistema rectangular de coordenadas como se muesra en la figura

Designemos los siguientes costos por unidad de artículo

p = costo de producción en B

C_A = costo en P de mercancía proveniente de A

C_B = costo en P de mercancía proveniente de B

Desde que costo total = costo de producción + costo de transporte se tiene

$$C_A = (p-12) + 0.20\, d(A, P)$$

$$C_B = p + 0.20\, d(B, P)$$

Ahora bien si $P = (x, y)$ es un punto en el cual $C_A = C_B$

entonces se tendrá que

$$(p-12) + 0.20\, d(A, P) = p + 0.20\, d(B, P)$$

o

$$d(A, P) - d(B, P) = 60$$

Luego P se encuentra en la rama derecha de la hipérbola con focos en $A = (-50, 0)$ y $B = (50, 0)$ y cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$$

RESPUESTA. Rama derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 14\,400$.

PROBLEMA 3. Hallar una ecuación del conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que la distancia de P a $(1, 2)$ es $3/2$ de la distancia de P a la recta $y = -1$.

SOLUCION. Sean $F_0 = (1, 2)$ y L: $y = -1$.

Si $P = (x, y)$ cumple $d(P, F_0) = \frac{3}{2}\, d(P, L)$

entonces se tiene

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \tfrac{3}{2}(y+1)$$

$$4\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] = 9(y+1)^2$$

$$4(x-1)^2 - 5y^2 - 34y = 7$$

$$5\left(y^2 + \tfrac{34}{5}y\right) - 4(x-1)^2 = 7$$

Y completando cuadrados

$$5\left(y + \frac{17}{5}\right)^2 - 4(x-1)^2 = 7 + \frac{17^2}{5} = \frac{324}{5}$$

obtenemos

$$\frac{\left(y + \frac{17}{5}\right)^2}{\frac{324}{25}} - \frac{(x-1)^2}{\frac{81}{5}} = 1$$

RESPUESTA. Una ecuación es $\dfrac{\left(y+\frac{17}{5}\right)^2}{\frac{324}{25}} - \dfrac{(x-1)^2}{\frac{81}{5}} = 1$

que representa una hipérbola con centro en $\left(1,-\frac{17}{5}\right)$, eje transversal paralelo al eje Y y semiejes transversal y conjugado $\frac{18}{5}$ y $\frac{9\sqrt{5}}{5}$, respectivamente.

PROBLEMA 4. Sea $k \neq 0$. Probar que la ecuación $xy = k$ es la ecuación de una hipérbola equilátera efectuando la rotación de 45° del sistema de coordenadas XY dada por:

$$x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y' \qquad\qquad x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'$$

SOLUCION. Sustituyendo las expresiones de x, y, dadas por las ecuaciones de cambio de coordenadas en $xy = k$, obtenemos

$$\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = k$$

$$\tfrac{1}{2}x'^2 - \tfrac{1}{2}y'^2 = k \qquad \text{o también} \qquad \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1$$

que representa una hipérbola equilátera con eje transversal X' o Y' según sea $k > 0$ o $k < 0$.

PROBLEMA 5. Sean e un número real > 1, F un punto fijo y L una recta que no contiene a F.

1) Probar que los puntos P del plano cuya distancia del punto F es e veces la distancia de la recta L, forman una hipérbola.
2) Si a y b son los semiejes transversal y conjugado de la hipérbola y si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, probar que $c = ea$.

Nota. Llamamos *foco* al punto F, *excentricidad* al número e y *directriz* a la recta L.

SOLUCION.

1) Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el punto F tal que el eje X sea perpendicular a la recta L y orientamos X positivamente en el sentido de la recta L al punto F.

   Se tiene así $\qquad F = (0,0), \qquad L\colon\ x = -d,$

   donde $\qquad d = d(F, L)$.

   Designemos con $P = (x, y)$ un punto tal que $\quad d(P,F) = e\,d(P,L)$.

Se tiene entonces $$\sqrt{x^2+y^2} = e\,|x+d|$$

$$\left(x^2+y^2\right) = e^2\,(x+d)^2$$

o $$\left(1-e^2\right)x^2 - 2e^2dx + y^2 = e^2d^2\,,$$

completando cuadrados $$\left(1-e^2\right)\left[x-\frac{e^2d^2}{1-e^2}\right]^2 + y^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

y dividiendo entre $\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}$ se obtiene

$$\frac{\left[x-\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}\right]^2}{\dfrac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}} = 1$$

El primer denominador es >0, y el segundo es <0, pues $e>1$ implica $e^2>1$ y $1-e^2<0$. Por lo tanto, la ecuación representa una hipérbola con centro en $\left(\dfrac{e^2d^2}{1-e^2},\ 0\right)$ y eje transversal paralelo al eje X.

2) Si a y b son los semiejes transversal y conjugado de la hipérbola respectivamente, de acuerdo a lo que se acaba de establecer, se debe cumplir que

$$a^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2}\,,\qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

Luego

$$c^2 = a^2+b^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = \frac{e^4d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2\times\frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2a^2$$

Por lo tanto $c = ea$.

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y=\pm\frac{3}{2}(x-1)+2$, y que pasa por el punto $(5,-9/2)$

SOLUCION. Puesto que las asíntotas son

$$y-2=\tfrac{3}{2}(x-1), \qquad y-2=-\tfrac{3}{2}(x-1),$$

multiplicando miembro a miembro, se obtiene

$$\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=0 .$$

Luego la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=k$$

donde k debe determinarse empleando la condición de que la hipérbola pasa por el punto $\left(5,-\tfrac{9}{2}\right)$. Haciendo $x=5$, $y=-\tfrac{9}{2}$, obtenemos

$$k=\frac{\left(-\tfrac{9}{2}-2\right)^2}{9}-\frac{(5-1)^2}{4}=\frac{25}{36}$$

RESPUESTA. $\dfrac{(y-2)^2}{\tfrac{25}{4}}-\dfrac{(x-1)^2}{\tfrac{25}{9}}=1$

PROBLEMA 7. Hallar la ecuación de la hipérbola con focos en $(0,0)$ y $(6,0)$ y excentricidad $e=\tfrac{3}{2}$.

SOLUCION. El centro de la hipérbola es $(3,0)$ y la ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{(x-3)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Se tiene además $\quad e=\tfrac{3}{2} \quad$ **(1)**

$2c=$ distancia entre los focos $=d[(0,0),(6,0)]=6 \quad$ **(2)**

$$c^2=a^2+b^2 \quad \textbf{(3)}$$

$$c=ea \quad \textbf{(4)}$$

De (1), (2) y (4): $\quad 3=\tfrac{3}{2}a \;\Rightarrow\; a=2 \quad$ **(5)**

y de (3) y (5) : $b^2=c^2-a^2=3^2-2^2=5$

RESPUESTA. $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1.$

PROBLEMA 8. Probar que el producto de las distancias de un punto cualquiera de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

SOLUCION. Consideremos la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

con asíntotas $\quad L_1:\ y = \frac{b}{a}x \quad$ o $\quad y - \frac{b}{a}x = 0$

$\quad L_2:\ y = -\frac{b}{a}x \quad$ o $\quad y + \frac{b}{a} = 0$

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Se tiene

$$d_1 = d(P, L_1) = \frac{\left| y - \frac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{-b}{a}\right)^2}}, \qquad d_2 = d(P, L_2) = \frac{\left| y + \frac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

Luego

$$d_1 d_2 = \frac{b^2 \left| \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right|}{1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

teniendo en cuenta que $\left| \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right| = 1$, pues P es un punto de la hipérbola.

Así, hemos demostrado que $\quad d_1 d_2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \text{constante.}$

PROBLEMA 9. Sean A y B dos puntos fijos cuya distancia es d. Probar que el conjunto de los puntos P tales que el ángulo PAB es dos veces el ángulo ABP, es una hipérbola con excentricidad $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

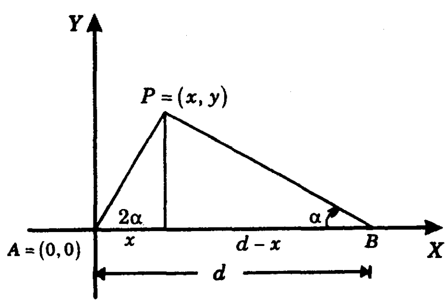
SOLUCION. Supongamos que

$$A = (0, 0) \quad \text{y} \quad B = (d, 0).$$

Sea $P = (x, y)$ un punto tal que $\measuredangle PAB = 2\measuredangle ABP$ y hagamos $\alpha = \measuredangle ABP$

Se tiene $\quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

y $\quad \frac{y}{d - x} = \operatorname{tg} \alpha$



Sustituyendo tg α en la primera ecuación $\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\left(\dfrac{y}{d-x}\right)}{1-\left(\dfrac{y}{d-x}\right)^2}$

$$y^2 - 3x^2 + 4dx = d^2,$$

y completando cuadrados

$$\frac{y^2}{\frac{7d^2}{3}} - \frac{\left(x-\frac{2}{3}d\right)^2}{\frac{7d^2}{3}} = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola con $a^2 = \dfrac{7d^2}{3}$, $b^2 = \dfrac{7d^2}{9}$; y calculando la excentricidad e: $\quad c^2 = a^2 + b^2 = \dfrac{28}{9}d^2,$

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{\frac{28}{9}d^2}{\frac{7}{3}d^2} = \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

PROBLEMA 10. Sea H una hipérbola con centro C. Si P es punto culquiera de H y L es la asíntota más próxima a P, demostrar que la distancia $d(P, L)$ tiende a cero si $d(P, C)$ crece indefinidamente; es decir que se cumple $d(P,L_1) \to 0$ cuando $d(P, C) \to +\infty$

SOLUCION. Por simplicidad vamos a suponer que $C = (0, 0)$ y que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Las ecuaciones de las asintotas son: L_1: $y - \dfrac{b}{a}x = 0$, $\quad L_2$: $y + \dfrac{b}{a}x = 0$.

Sea $P = (x, y)$ un punto de la hipérbola.

De (1) se tiene que

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Supongamos que $P = (x, y)$ se encuentra en la parte superior de la rama derecha de la hipérbola, es decir que se cumple $x \geq a$, $y \geq 0$.

Demostraremos que $d(P,L_1)$ tiende a 0

cuando $\quad d(P,0) = \sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} \quad$ tiende a $+\infty$, esto es cuando $x \to +\infty$.

Calculamos $d(P,L_1)$ sustituyendo (2) en

$$d(P,L_1) = \frac{\left|y - \frac{b}{a}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{b\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

y racionalizando

$$d(P,L_1) = \frac{b\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|}{\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|} = \frac{ba^2}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|}$$

Luego, si $x \to +\infty$, entonces el denominador$\to +\infty$, el segundo miembro $\to 0$, y por lo tanto, $d(P,L_1) \to 0$.

De modo similar se prueban los casos en que P se encuentra en la parte inferior de la rama derecha o en las partes superior o inferior de la rama izquierda de la hipérbola.

PROBLEMA 11. Si $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación de una hipérbola, las asíntotas $y = mx + b$ se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} A + Bm + Cm^2 = 0 \\ Bb + 2Cbm + D + Em = 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Encontrar las asíntotas y el centro de la hipérbola

$$10x^2 + 11xy - 6y^2 - 82x - 9y + 262 = 0$$

SOLUCION. Utilizando las ecuaciones (*)

$$10 + 11m - 6m^2 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$11b - 12bm - 82 - 9m = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Las raices de la ecuación (1) son

$$m = \frac{11 \pm \sqrt{361}}{12} = \begin{cases} 5/2 \\ -2/3 \end{cases}$$

que sustituidas en (2) dan $\quad b = \begin{cases} -11/2 \\ 4 \end{cases}$

Las asíntotas son

$$L_1:\ y = \tfrac{5}{2}x - \tfrac{11}{2} \quad \textbf{(3)}$$

$$L_2:\ y = -\tfrac{2}{3}x + 4 \quad \textbf{(4)}$$

El centro de la hipérbola es el punto de intersección de las asíntotas. Resolviendo las ecuaciones (3) y (4) obtenemos

$$x = 3 \qquad y = 2.$$

4.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Hallar los focos, vértices, excentricidad y asíntotas de la hipérbola $25x^2 - 9y^2 = 225$

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $5y + 12x - 39 = 0$, $5y - 12x + 9 = 0$, y que pasa por el punto $(-8,3)$.

Sugerencia. Usar la propiedad de que si P es un punto de la hipérbola y $d(P, L_1)$ y $d(P, L_2)$ son las distancias de P a las asíntotas, entonces

$$d(P, L_1) \times d(P, L_2) = \text{constante} = k \quad \text{(Ver problema resuelto Nº8).}$$

PROBLEMA 3. Hallar la ecuación de una hipérbola con eje transversal paralelo al eje X, excentricidad $5/3$, y que pasa por los puntos $(4,0)$, $(-2,2)$ y $(-11/4, 5)$

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de una hipérbola equilátera cuyo centro es el origen y que tiene sus focos sobre la recta $y = \frac{4}{3}x$ a una distancia 5 del origen.

PROBLEMA 5. Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en $(-1, 0)$, sus focos en el eje X y que pasa por los puntos $(4, 0)$ y $\left(5\sqrt{2} - 1, 12\right)$

PROBELMA 6. Si $4x^2 + 5xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$ es la ecuación de una hipérbola, hallar las asíntotas y el centro de la hipérbola.

PROBLEMA 7. Probar que no existe ninguna recta $y = mx$ que corta a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en exactamente un punto.

PROBLEMA 8. Las asíntotas de una hipérbola forman un ángulo de 60° con el eje transversal. Hallar la excentricidad de la hipérbola.

PROBLEMA 9. Se llama lado recto o cuerda focal de una hipérbola a la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje transversal. Probar que la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$, donde a y b son los ejes transversal y conjugado, respectivamente.

PROBLEMA 10. La hipérbola H tiene las asíntotas $2x - 3y + 12 = 0$ y $2x + 3y = 0$. Si un vértice de H es $(0, 2)$, hallar la ecuación de H.

PROBLEMA 11. Sea la hipérbola $4x^2 - 3y^2 = 36$. Hallar la ecuación de la cuerda cuyo punto medio es $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$.

RESPUESTAS.

1. focos: $\left(-\sqrt{34}, 0\right), \left(\sqrt{34}, 0\right)$; vértices: $(-3, 0), (3, 0)$;

   excentricidad: $e = \sqrt{34}/3$; asíntotas: $y = \pm\frac{5}{3}x$.

2. $\dfrac{(x-2)^2}{10^2} - \dfrac{(y-3)^2}{24^2} = 1.$

3. $\dfrac{(x-1)^2}{3^2} - \dfrac{(y-2)^2}{4^2} = 1$

4. $14x^2 - 14y^2 - 96xy + 625 = 0.$

5. $\dfrac{(x+1)^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{12^2} = 1.$

6. Asíntotas: $3x + 3y = -1$, $12x + 3y = -5$; Centro: $\left(-\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

8. $e = 2$

10. $4x^2 + 24x - 2y^2 + 36y = 36.$

11. $y = 2x - 6.$

Capítulo 5

La Ecuación General de Segundo Grado

5.1 DEFINICION. Una *sección cónica* C es el conjunto de los puntos del plano tales que su distancia a un punto fijo F es e veces su distancia a una recta fija L. Así, C consiste de todos los puntos P que cumplen

$$d(P,F) = e\,d(P,L)$$

Se llama *foco* al punto F, *directriz* a la recta L y *excentricidad* al número $e \geq 0$.

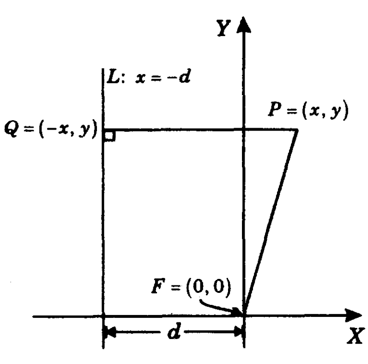
Tenemos el siguiente resultado:

5.2 TEOREMA.

1) Si $0 \leq e < 1$, entonces C es una elipse.

2) Si $e = 1$, entonces C es una parábola.

3) Si $e > 1$, entonces C es una hipérbola.



DEMOSTRACION. En efecto, supongamos que $F = (0,0)$ y que L es la recta $x = -d$, donde $d = d(F,L)$. Si $P(x,y)$ es un punto de C, entonces se cumple que

$$d(P,F) = e\,d(P,L) \qquad \textbf{(1)}$$

De (1) se tiene, $\sqrt{x^2+y^2} = e\,|x+d|,$

y elevando al cuadrado ambos miembros y agrupando términos en x, llegamos a:

$$\left(1-e^2\right)x^2 - 2e^2 d\,x + y^2 = e^2 d^2 \tag{2}$$

Si $e \neq 1$ entonces la ecuación (2) se puede escribir

$$\left(1-e^2\right)\left[x^2 - \frac{2e^2 d}{1-e^2}x\right] + y^2 = e^2 d^2,$$

completando cuadrados

$$\left(1-e^2\right)\left[x^2 - \frac{2e^2 d}{1-e^2}x + \frac{e^4 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}\right] + y^2 = e^2 d^2 + \frac{e^4 d^2}{1-e^2}$$

$$\left(1-e^2\right)\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$$

y dividiendo por $\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}$

$$\frac{\left(x - \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1 \tag{3}$$

y esta ecuación es equivalente con (2) si $e \neq 1$.

Podemos concluir que C es

1. *una parábola* si $e = 1$, ya que entonces la ecuación (2) es $y^2 = 2dx + d^2$

$$y^2 = 4p(x-h)$$

donde $4p = 2d$; $h = -\frac{1}{2}d$

2. *una elipse* si $e < 1$, ya que entonces la ecuación (3) es $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} > b^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2} > 0, \text{ pues } e<1 \text{ y } h = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$$

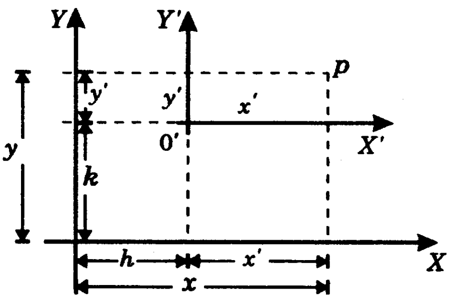
3. *una hipérbola* si $e > 1$, ya que entonces la ecuación (3) es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a^2 = \dfrac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}$ y $b^2 = \dfrac{e^2 d^2}{e^2 - 1} > 0$, pues $e > 1$, y $h = \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}$.

5.3 TRASLACION DE EJES

Sea el sistema de coordenadas cartesianas XY. Decimos que un sistema de coordenadas cartesianas $X'Y'$ ha sido obtenido por *traslación de los ejes X e Y al punto* $0'$ si se cumple que:



1) El origen $X'Y'$ es $0'$
2) Los ejes X y X' son paralelos y tienen el mismo sentido.
3) Los ejes Y e Y' son paralelos y tienen el mismo sentido.

Un punto P cualquiera del plano admite dos pares de coordenadas:

uno,	el par (x, y) referido al sistema XY
y otro,	el par (x', y') referido al sistema $X'Y'$

Si (h, k) son las coordenadas XY del punto $0'$, entonces las ecuaciones entre los pares de coordenadas (x,y), (x',y') del punto P son:

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}$$

EJEMPLO 1. Trasladar los ejes XY de modo que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 2y + 8 = 0$ referida a los nuevos ejes no contenga términos de segundo grado, ni término constante.

SOLUCION. Sean $\quad x = x' + h, \quad y = y' + k$

las ecuaciones de traslación de ejes, donde (h, k) es el origen del sistema de coordenadas $X'Y'$.

Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$(x'+h)^3 - 3(x'+h)^2 + 2(y'+k) + 8 = 0,$$

desarrollando y agrupando términos:

$$x'^3 + 3(h-1)x'^2 + 3(h^2-2h)x' + 2y' + (h^3 - 3h^2 + 2k + 8) = 0$$

Puesto que los términos de segundo grado y el término constante deben ser nulos, debe cumplirse

$$h-1=0$$

$$h^3-3h^2+2k+8=0$$

ecuaciones que resueltas dan $\quad h=1, \quad k=-2.$

Luego, habra que trasladar los ejes *XY* al punto $(1,-2)$, y referida a los nuevos ejes $X'Y'$ la ecuación toma la forma

$$x'^3 - 3x' + 2y' = 0$$

EJEMPLO 2. Hallar una traslación de los ejes de tal forma que la ecuación

$$3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$$

referida a los nuevos ejes, no contenga términos de primer grado.

SOLUCION.

1er. método. Partimos de la ecuación de traslación de los ejes $x = x'+h$, $y = y'+k$, y procedemos como en el ejemplo anterior.

2do. método. Completamos cuadrados en la ecuación dada.

$$3(x^2+2x) - 2(y^2+4y) - 11 = 0$$

$$3(x^2+2x+1) - 3 - 2(y^2+4y+4) + 8 - 11 = 0$$

$$3(x+1)^2 - 2(y+2)^2 - 6 = 0,$$

que se escribe $\quad 3x'^2 - 2y'^2 - 6 = 0,$

si efectuamos la traslación $\quad x' = x+1, \quad y' = y+2$

5.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Expresar $x^2 + xy + y^2 - 3x + 2 = 0$ respecto de un sistema de coordenadas obtenido por traslación de ejes, si la ecuación resultante no contiene términos de primer grado.

RESPUESTA. $x'^2 + x'y' + y'^2 - 1 = 0$

PROBLEMA 2. Se han trasladado los ejes XY a un punto $0'$. Si la ecuación $3x - 2y = 6$ referida a los nuevos ejes no contiene término constante y la distancia de $0'$ al origen XY es 5, hallar las coordenadas del punto $0'$.

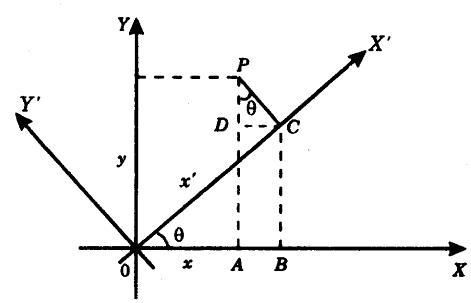
RESPUESTA. $0' = (4,3)$, $0' = \left(-\frac{16}{13}, -\frac{63}{13}\right)$

5.5 ROTACION DE EJES

Consideremos dos sistemas de coordenadas cartesianas XY y $X'Y'$ con origen común 0. Sean (x,y) las coordenadas en XY, y (x',y') las coordenadas en $X'Y'$ de un punto cualquiera P del plano. Decimos que el sistema de $X'Y'$ *ha sido obtenido rotando en un ángulo* θ el sistema XY si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= x'\,\mathrm{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \tag{1}$$

Estas ecuaciones entre las coordenadas de un punto pueden obtenerse gráficamente en la forma que a continuación describimos. Para simplificar la exposición vamos a suponer que el ángulo de rotación θ está comprendido entre 0° y 90°.



Sean A y C, los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los ejes X y X' respectivamente, y B y D los pies de las perpendiculares trazadas desde C al eje X y al segmento $\overline{AP}$, respectivamente.

Es fácil ver que $\measuredangle DPC = \theta$.

Se tiene $x = d(0,A) = d(0,B) - d(A,B)$,

pero $d(0,B) = x'\cos\theta$ (en el triángulo OBC)

$d(A,B) = d(D,C) = y'\,\mathrm{sen}\,\theta$ (en el triángulo DPC)

y por lo tanto

$$x = x'\cos\theta - y'\mathrm{sen}\,\theta \tag{2}$$

En forma similar se tiene $y = d(A,P) = d(A,D) + d(D,P)$,

pero $d(A,D) = d(B,C) = x'\,\mathrm{sen}\theta$ (en el triángulo OBC)

$d(D,P) = y'\cos\theta$ (en el triángulo DPC)

por lo tanto

$$y = x'\,\mathrm{sen}\theta + y'\cos\theta \tag{3}$$

Nota.

1. Si despejamos x' e y' en las ecuaciones (1) obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\theta \\ y' &= -x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \qquad (4)$$

2. Las ecuaciones (1) o (4) se llaman *ecuaciones de rotación de los ejes,* y la relación que ellas definen entre los pares de coordenadas (x, y), (x', y'), se denomina una *(transformación de) rotación*.

3. Si hacemos $u = \cos\theta$ y $v = \mathrm{sen}\theta$, las ecuaciones (1) se expresan

$$x = ux' - vy', \qquad y = vx' + uy'$$

junto con la condición adicional $u^2 + v^2 = 1$, que es otra forma de definir la rotación. En muchos problemas de rotación de ejes no es necesario conocer el ángulo θ, sino más bien los números u y v.

5.6 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. ¿Qué rotaciones de coordenadas transforma la ecuación $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$ en la ecuación $7x'^2 + y'^2 = 8$?

SOLUCION. Sean las ecuaciones de rotación de ejes

$$x = ux' - vy', \qquad y = vx' + uy', \qquad u^2 + v^2 = 1 \qquad (1)$$

Remplazando x, y en la ecuación dada

$$2(ux' - vy')^2 + 3(ux' - vy')(vx' + uy') + 2(ux' + uy')^2 = 4$$

$$2\left(u^2x'^2 - 2uvx'y' + v^2y'^2\right) + 3\left(uvx'^2 + u^2x'y' - v^2x'y' - uvy'^2\right) +$$
$$+ 2\left(v^2x'^2 + 2uvx'y' + u^2y'^2\right) = 4$$

Agrupando términos y multiplicando por 2 resulta

$$2\left(2u^2 + 3uv + 2v^2\right)x'^2 + 6\left(u^2 - v^2\right)x'y' + 2\left(2v^2 - 3uv + 2v^2\right)y'^2 = 8$$

Por el enunciado del problema debemos tener

$$2\left(2u^2 + 3uv + 2v^2\right) = 7 \qquad (2)$$

$$6\left(u^2 - v^2\right) = 0 \qquad (3)$$

$$2\left(2v^2 - 3uv + 2v^2\right) = 1 \qquad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (3) $u^2+v^2=1$, $u^2-v^2=0$, obtenemos $u=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $v=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, y sustituyendo estos valores de u y v *en* (2) y (4) vemos que

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2},\ v=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad u=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ v=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$ cumplen todas las condiciones.

RESPUESTA. Las rotaciones son $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, y $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, que corresponden a un ángulo rotado de 45° y 225°, respectivamente.

PROBLEMA 2. Simplificar la ecuación $11x^2-24xy+4y^2+6x+8y-45=0$ por una rotación y traslación de ejes.

SOLUCION.

Paso 1. Mediante una rotación eliminamos el término diagonal xy.

Sea $\qquad x=ux'-vy'$, $\quad y=vx'+uy'\quad$ donde, $u^2+v^2=1$, **(1)**

una rotación que elimina el término $x'y'$.

Reemplazando x,y en las ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned}&\left(11u^2-24uv+4v^2\right)x'^2+\left(11u^2+24uv+4v^2\right)y'^2+\\&+\left(-22uv-24u^2+24v^2+8uv\right)x'y'+(6u+8v)x'+(-6v+8u)y'-45=0\end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que el término en $x'y'$ debe ser nulo

$$-14uv+24\left(-u^2+v^2\right)=0 \quad \text{o} \quad 7uv=12\left(v^2-u^2\right) \tag{3}$$

Resolvemos las ecuaciones (1) y (3). Elevando al cuadrado (3) y reemplazando $v^2=1-u^2$ obtenemos

$$49u^2v^2 = 144\left(v^2-u^2\right)^2$$

$$49u^2\left(1-u^2\right) = 144\left(1-2u^2\right)^2$$

$$625u^4-625u^2+144=0$$

o, $u^4-u^2+\frac{144}{625}=0$, que resuelta para u^2 da

$$u^2=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times\frac{144}{625}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{49}{625}}}{2}=\frac{16}{25} \quad \text{ó} \quad \frac{9}{25}$$

Luego $u = \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{3}{5}$, y de (1), $v = \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}$.

Debemos verificar si estos valores de u y v cumplen la ecuación (3).

Si $u = \pm\frac{4}{5}$ y $v = \pm\frac{3}{5}$ entonces el segundo miembro de (3) es negativo, y por consiguiente u y v deben tener signos opuestos.

Así, $(u, v) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ o $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Similarmente $(u, v) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ o $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

De esta manera vemos que hay 4 rotaciones posibles que eliminan el témino en $x'y'$. Vamos a elegir la rotación dada por $u = \frac{3}{5}$, $v = \frac{4}{5}$.

Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos

$$-x'^2 + 4y'^2 + 10x' - 9 = 0$$

Paso 2. Mediante una traslación de ejes eliminamos el término lineal $10x'$:

$$-\left(x'^2 + 10x'\right) + 4y'^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; -\left(x' + 5\right)^2 + 4y'^2 + 16 = 0$$

$$-x_1^{\,2} + 4y_1^{\,2} + 16 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x_1^{\,2}}{16} - \frac{y_1^{\,2}}{4} = 1 \quad \text{donde} \quad x_1 = x' + 5,\; y_1 = y'$$

RESPUESTA. $\dfrac{x_1^{\,2}}{16} - \dfrac{y_1^{\,2}}{4} = 1.$

Nota. Hay otras soluciones correspondientes a las rotaciones restantes. De una manera más precisa, para el problema que acabamos de tratar se obtienen finalmente dos formas simplificadas, a saber:

$$\frac{x_1^{\,2}}{16} - \frac{y_1^{\,2}}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y_1^{\,2}}{16} - \frac{x_1^{\,2}}{4} = 1.$$

PROBLEMA 3. Hallar el ángulo que hay que rotar los ejes para eliminar el término cuadrático o diagonal xy de la ecuación $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3} - 8y = 0$

SOLUCION. *Consideremos la* rotación $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$, $y = x'\operatorname{sen}\theta - y'\cos\theta$.
Sustituyendo x,y en la ecuación dada, el coeficiente de $x'y'$ resulta ser

$$4\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta - 2\sqrt{3}\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

y puesto que deseamos eliminar el término en $x'y'$, dicho coeficiente debe ser nulo. Así, debemos tener

$$4\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta - 2\sqrt{3}\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 0$$

o, en función del ángulo 2θ, $\quad 2\operatorname{sen}2\theta - 2\sqrt{3}\cos 2\theta = 0$

Luego $\quad \operatorname{tg}2\theta = \sqrt{3}$.

Como $2\theta = 60^\circ$ satisface tal condición, vemos que $\theta = 30^\circ$ da lugar a una rotación que elimina el término xy.

RESPUESTA. Un ángulo de rotación de 30°.

LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

5.7 DEFINICION. Se llama ecuación general de segundo grado o ecuación cuadrática general en las variables x e y a una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, y al menos uno de los coeficientes A, B o C es no nulo.

Llamamos *discriminante* de la ecuación al número $\Delta = B^2 - 4AC$.

El conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación se llama una *curva de segundo grado*.

Las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) son curvas de segundo grado ya que satisfacen ecuaciones de la forma (1). Sin embargo, hay curvas de segundo grado que no son secciones cónicas, por ejemplo:

(1) La curva $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ consiste de un solo punto: $(2, 3)$, pues si completamos cuadrados obtenemos

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0, \text{ cuya única solución es } (2, 3).$$

(2) La curva $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$ es *la recta* $x = 2y + 1$, ya que si factorizamos el primer miembro obtenemos

$$(x - 2y - 1)^2 = 0$$

(3) La curva $2x^2 - 3y^2 - xy = 0$ consiste de las *dos rectas* $2x - 3y = 0$ y $x + y = 0$, ya que la ecuación se puede escribir

$$(2x - 3y)(x + y) = 0$$

(4) La curva $x^2 + y^2 - 2xy + 5 = 0$ *no tiene puntos*, ya que la ecuación puede escribirse $(x - y)^2 = -5$, que obviamente no tiene soluciones pues el primer miembro siempre es no negativo.

Se suele decir que estos casos constituyen los *casos excepcionales o degenerados* de las secciones cónicas. Se prueba que toda curva de segundo grado es una sección cónica o una sección cónica degenerada, aludiendo a los casos que acabamos de mencionar.

5.8 PROPOSICION. Supongamos que $B \neq 0$ en la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para eliminar el término en xy mediante una rotación de los ejes el ángulo de rotación θ debe cumplir la condición

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A-C}{B}$$

Nota. En este caso $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} 2\theta}{2}}$ y la rotación viene dada por $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$, $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$.

Convenio Sobre el Angulo de Rotación. Suponemos que θ está comprendido entre 0° y 90°, y por lo tanto 2θ se encuentra en los cuadrantes I o II del plano XY.

Ejemplo. Mediante una rotación de los ejes simplificar la ecuación

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 + \sqrt{13}x - 2\sqrt{13}y + 2 = 0.$$

Solución. Se tiene $\operatorname{ctg} 2\theta = \dfrac{A-C}{B} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$

y $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$,

y la rotación es $x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y')$ $y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y')$.

Sustituyendo en la ecuación y simplificando resulta

$$13x'^2 - 13y'^2 - x' - 8y' + 2 = 0.$$

5.9 TEOREMA. La ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + F = 0$ es la ecuación de

1) una elipse (o elipse degenerada) si $B^2 - 4AC < 0$,
2) una parábola (o parabola degenerada) si $B^2 - 4AC = 0$,
3) una hipérbola (o hipérbola degenerada) si $B^2 - 4AC > 0$.

5.10 NOTA. Los casos de degeneración son

1) Para la elipse $\begin{cases} \text{Un punto} \\ \text{Ningún punto} \end{cases}$

$$\text{2) Para la parábola} \begin{cases} \text{Dos rectas paralelas} \\ \text{Una recta (dos rectas iguales)} \\ \text{Ningún punto} \end{cases}$$

$$\text{3) Para la hipérbola } \{ \text{Dos rectas que se cortan.}$$

Hagamos un estudio más preciso sobre la naturaleza de la curva

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Supongamos que $C \neq 0$ y sea $\Delta = B - 4AC$ el discriminante de la ecuación. Podemos escribir

$$Cy^2 + (Bx + E)y + \left(Ax^2 + Dx + F\right) = 0$$

y resolviendo para y

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - 4C\left(Ax^2 + Dx + F\right)}}{2C}$$

El radicando es

$$R = (Bx+E)^2 - 4C\left(Ax^2 + Dx + F\right) = \left(B^2 - 4AC\right)x^2 + 2(BE - 2CD)x + \left(E^2 - 4CF\right)$$

El discriminante de esta expresión es

$$4(BE - 2CD)^2 - 4\left(B^2 - 4AC\right)\left(E^2 - 4CF\right).$$

Tenemos el siguiente cuadro para la curva

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (C \neq 0)$$

DISCRIMINANTE	GENERO DE CURVA	RADICANDO	ESPECIE DE CURVA
$B^2 - 4AC < 0$	Elipse	$\delta > 0$ $\delta = 0$ $\delta < 0$	Elipse Elipse-punto No tiene puntos
$B^2 - 4AC = 0$	Parábola	$p \neq 0$ $p = 0,\ q > 0$ $p = 0,\ q = 0$ $p = 0,\ q < 0$	Parábola Dos rectas paralelas Una recta No tiene puntos
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbola	$\delta \neq 0$ $\delta = 0$	Hipérbola Dos rectas que se cortan

donde $\quad p = BE - 2CD,$

$$q = E^2 - 4CF,$$

$$\delta = p^2 - \Delta q = (BE - 2CD)^2 - \left(B^2 - 4AC\right)\left(E^2 - 4CF\right)$$

5.11 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Discutir la siguiente curva y simplificarla

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x + 10y - 25 = 0.$$

SOLUCION. Se tiene $A = 4$, $B = 4$, $C = 1$ y por lo tanto $B^2 - 4AC = 0$. Por consiguiente, la curva es una parábola (o parábola degenerada).

Calculamos la rotación

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{3}{4}, \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Luego $\quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y')$, $\quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y')$.

Sustituyendo en la ecuación de la curva obtenemos $x'^2 + 5\sqrt{5}y' - 25 = 0$,

que es la parábola $\quad x'^2 = -5\sqrt{5}\left(y' - \sqrt{5}\right).$

PROBLEMA 2. Determinar la naturaleza de la siguiente curva

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y + 13 = 0.$$

SOLUCION. Se tiene $A = 17$, $B = -12$, $C = 8$. Puesto que $B - 4AC = -400$, la curva es una elipse. Simplificando la ecuación mediante una rotación de los ejes, se tiene

$\operatorname{ctg} 2\theta = \dfrac{A-C}{B} = -\dfrac{3}{4}$. Puesto que $0 \le 2\theta \le 180^\circ$, se sigue que $\cos 2\theta = -\dfrac{3}{5}$.

Luego $\quad \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Sustituyendo las ecuaciones $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$ en la ecuación de la curva dada obtenemos

$$\tfrac{17}{5}\left(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2\right) - \tfrac{12}{5}\left(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2\right) +$$
$$+ \tfrac{8}{5}\left(4x'^2 + 4x'y' + y'^2\right) - \tfrac{30}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{40}{\sqrt{5}}y' + 13 = 0$$

$5x'+20y'^2-\frac{30}{\sqrt{5}}x'+\frac{40}{\sqrt{5}}y'+13=0 \;\Rightarrow\; \left(x'-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=0$, ecuación cuya única solución es el punto $\left(\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Luego la elipse se reduce a este punto.

RESPUESTA. La curva es una elipse punto.

PROBLEMA 3. Sea la ecuación de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

1) Probar que si $B\neq 0$, entonces un ángulo de rotación θ elimina al término xy si y solamente si se cumple $\operatorname{ctg} 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$.
2) Si $A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$ es una ecuación obtenida de la ecuación dada por rotación de los ejes, entonces se cumple la relación

$$B^2-4AC=B'^2-4A'C'.$$

SOLUCION. Consideremos una rotación cualquiera

$$x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta\ ,\qquad y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$$

Sustituyendo en la ecuación dada

$$A(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)^2+B(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)+$$
$$+C(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)^2+D(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)+E(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)+F=0$$

obtenemos $$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

donde
$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta+B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\operatorname{sen}^2\theta \\ B' = -2A\operatorname{sen}\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)+2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ C' = A\operatorname{sen}^2\theta-B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\cos^2\theta \\ D' = D\cos\theta+E\operatorname{sen}\theta \\ E' = -D\operatorname{sen}\theta+E\cos\theta \\ F'=F \end{cases}$$

1) Para que el término $B'x'y'$ sea cero se requiere que $B'=0$, o sea

$$(-A+C)\operatorname{sen}2\theta+B\cos 2\theta=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{ctg}2\theta=\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen}2\theta}=\frac{A-C}{B}.$$

2) Debemos probar que $B'^2-4A'C'=B^2-4AC$.

Empleando las expresiones que hemos calculado y llamando $u = \cos\theta$, $v = \operatorname{sen}\theta$, de modo que $u^2 + v^2 = 1$, tenemos

$$B' = \left[-2Auv + B\left(u^2 - v^2\right) + 2Cuv\right]^2$$
$$= 4A^2u^2v^2 + B^2\left(u^2 - v^2\right)^2 +$$
$$+4C^2u^2v^2 - 4ABuv\left(u^2 - v^2\right) - 8ACu^2v^2 + 4BCuv\left(u^2 - v^2\right)$$
$$-4A'C' = -\left[4Au^2 + Buv + Cv^2\right]\left[Av^2 - Buv + Cu^2\right]$$
$$= -4A^2u^2v^2 + 4ABu^3v - 4ACu^3 - 4ABuv^3 +$$
$$+ 4B^2u^2v^2 - 4BCu^3v - 4ACv^4 + 4BCuv^3 - 4C^2u^2v^2$$

Sumando miembro a miembro nos da

$$B'^2 - 4A'C' = B^2\left(u^2 - v^2\right)^2 - 8ACu^2v^2 - 4ACu^4 + 4B^2u^2v^2 - 4ACv^4$$
$$= B^2\left(u^2 + v^2\right)^2 - 4AC\left(u^2 + v^2\right)^2 = B^2 - 4AC,$$

puesto que $u^2 + v^2 = 1$.

PROBLEMA 4. Hallar la excentricidad de $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$.

SOLUCION. Se tiene $A = 9$, $B = -4$, $C = 6$. Luego $B^2 - 4AC = -200$ y la curva es una elipse. Efectuamos una rotación para eliminar el término cuadrático xy

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{3}{4},$$

de donde $\cos 2\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Sustituyendo las relaciones $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$

en la ecuación dada se obtiene

$$\tfrac{9}{5}(x' - 2y')^2 - \tfrac{4}{5}(x' - 2y')(2x' - y') + 6(2x' + y')^2 - \tfrac{12}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \tfrac{4}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 4 = 0$$

$$5x'^2 + 10y'^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}x' + \frac{20}{\sqrt{5}}y' + 4 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{2}{5}} + \frac{\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\frac{1}{5}} = 1$$

Así, tenemos que $a^2 = \frac{2}{5}$, $b^2 = \frac{1}{5}$, $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{5}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

RESPUESTA. $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 5. Hallar la excentricidad de la curva $4xy - 3x^2 - 16 = 0$.

SOLUCION. Escribimos $3x^2 - 4xy + 16 = 0$.

Luego $A = 3$, $B = -4$, $C = 0$ y $B^2 - 4AC = 16 > 0$.

Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

Efectuamos una rotación de los ejes para eliminar el término xy

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La rotación es $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$.

Y sustituyendo en la ecuación

$$\tfrac{3}{5}(x' - 2y')^2 - \tfrac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x'^2 + 4y'^2 + 16 = 0$$

o $$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Luego $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 20$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

RESPUESTA. $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de una hipérbola equilátera que pasa por $(-6, 4)$, $(3, -5)$, $(6, 10)$ y $(2, 3)$.

SOLUCION.

Paso 1. En primer lugar probaremos que si

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

es la ecuación de la hipérbola equilátera, entonces $A + C = 0$

En efecto, supongamos que efectuamos una rotación de los ejes que elimina el término cuadrático xy, de manera que la ecuación de la curva referida a los nuevos ejes es

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{2}$$

donde $$A' = A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta$$
$$C' = A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

Sumando miembro a miembro obtenemos

$$A'+C' = A\left(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right) + C\left(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)$$

o sea que $\qquad A'+C' = A+C \qquad$ **(3)**

Ahora bien, puesto que (2) es la ecuación de una hipérbola equilátera se cumple $A'+C'=0$. Luego de (3) se sigue que $A+C=0$.

Paso 2. De acuerdo al *paso 1* la ecuación de la hipérbola es

$$Ax^2+Bxy-Ay^2+Dx+Ey+F=0.$$

Suponiendo que $A\neq 0$ (por supuesto, también podríamos suponer que $B\neq 0$) y dividiendo la ecuación entre A, se obtiene

$$x^2-y^2+bxy+dx+ey+f=0$$

Reemplazando las coordenadas de los puntos $(-6,4)$, $(3,-5)$, $(6,10)$, $(2,3)$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 20-24b-6d+4e+f &= 0\\ -16-15b+3d-5e+f &= 0\\ -64+60b+6d+10e+f &= 0\\ -5+6b+2d+3e+f &= 0\ , \end{aligned}$$

que resuelto da $b=\frac{7}{2}$, $d=-\frac{23}{2}$, $e=-12$, $f=43$

RESPUESTA. $\quad 2x^2-2y^2+7xy-23x-24y+86=0.$

PROBLEMA 7. Probar que si $B^2-4AC>0$, entonces la curva $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ es una hipérbola.

SOLUCION. Efectuando una rotación de los ejes que elimine el término cuadrático xy se obtiene

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'+E'^2=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Por la parte 2 del problema 3, los discriminantes de las ecuaciones son iguales $-4A'C'=B^2-4AC$, y siendo $B^2-4AC>0$ por hipótesis, obtenemos $A'C'<0$. Luego A' y C' tienen signos opuestos.
Completando cuadrados en (1) obtenemos

$$A'\left(x'^2+\frac{D'}{A'}x'\right) + C'\left(y'^2+\frac{E'}{A'}y'\right) = -F'$$

$$A'\left(x'+\frac{D'}{A'}\right)^2 + C'\left(y'+\frac{E'}{A'}\right) = R \qquad \textbf{(2)}$$

donde $R = -F' + \dfrac{D'^2}{2A'} + \dfrac{E'^2}{2A'}$.

Debemos considerar dos casos:

Caso 1. $R \neq 0$. Entonces (2) se escribe $\dfrac{\left(x'+\dfrac{D'}{2A'}\right)^2}{\dfrac{R}{A'}} + \dfrac{\left(y'+\dfrac{E'}{2A'}\right)^2}{\dfrac{R}{C'}} = 1$

que *es una hipérbola* con ejes paralelos a los ejes $X'Y'$ puesto que $\dfrac{R}{A'}$ y $\dfrac{R}{C'}$ tienen signos opuestos.

Caso 2. $R = 0$. Entonces (2) se escribe

$$\left(y'+\frac{E'}{2A'}\right)^2 = -\frac{A'}{C'}\left(x'+\frac{D'}{2A'}\right)^2$$

o
$$y' = -\frac{E'}{2A'} \pm \sqrt{-\frac{A'}{C'}}\left(x'+\frac{D'}{2A'}\right)$$

que representa dos rectas que se cortan.

En resumen, si $B^2 - 4AC > 0$ entoces la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa a una hipérbola o dos rectas que se cortan.

PROBLEMA 8. Se llama *cuerda focal* de una cónica a un segmento de recta que pasa por el foco y cuyos extremos se encuentran en la cónica. Probar que si dos cuerdas focales de una parábola son perpendiculares, entonces la suma de los inversos de sus longitudes es una constante.

SOLUCION. Consideramos la parábola $y^2 = 4d(x+d)$ con el foco en el origen.
Entonces una recta que pasa por el foco es de la forma $y = mx$.
Calcularemos la longitud de la cuerda determinada por los puntos de intersección de la recta con la parábola.
Sustiuyendo $y = mx$ en la ecuación de la parábola tenemos

$$m^2x^2 = 4d(x+d) \quad \text{o} \quad m^2x^2 - 4dx - 4d^2 = 0$$

cuyas raíces son $$x_1,\, x_2 = \frac{2d \pm 2d\sqrt{1+m^2}}{m^2},$$

y por lo tanto $$x_1 - x_2 = \frac{4d\sqrt{1+m^2}}{m^2}$$

Luego $P_1 = (x_1, mx_1)$, $P_2 = (x_2, mx_2)$ determinan una cuerda focal cuya longitud es

$$L = d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(1+m^2)(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+m^2)(4d)^2(1+m^2)}{m^4}} = 4d\left[\frac{1+m^2}{m^2}\right] \tag{1}$$

De igual manera para la recta $y = -\dfrac{1}{m}x$, perpendicular a la recta dada, la longitud de la cuerda dada es

$$L' = 4d\left[\frac{1+\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2}{\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2}\right] = 4d\left(1+m^2\right) \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} = \frac{m^2}{4d(1+m^2)} + \frac{1}{4d(1+m^2)} = \frac{1}{4d} = \text{constante.}$$

5.12 PROBLEMAS PROPUESTOS.

Simplificar las siguientes ecuaciones mediante rotación y traslación de los ejes e indicar la naturaleza de la cónica que representan.

1. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 14x - 10y + 15 = 0$.

2. $5x^2 - 20xy - 10y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$.

3. $x^2 + 6xy + 9y^2 + x - 7y + 1 = 0$.

4. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$.

5. $5x^2 - 24xy - 5y^2 - 8x + 14y + 16 = 0$.

6. $15x^2 + 5xy + 3y^2 = 155$.

7. $3x^2 - 8xy - 16y^2 - x + 4y = 0$.

8. $48x^2 - 12xy + 43y^2 + 12x + 18y + 3 = 0$.

9. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 7 = 0$.

10. $5x^2 + 5y^2 - 6x + 12y + 19 = 0$.

Haciendo uso del discriminante y del radicando de la ecuación de segundo grado, identificar las siguientes curvas:

11. $2x^2 - xy - 3y^2 = 0$.

12. $4x^2 + 4xy + 4y^2 + 14x + 10y + 7 = 0$.

13. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7x + 5y + 7 = 0$.

14. $2x^2 + 8xy + 2y^2 + 10x + 14y + 5 = 0$.

15. $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 20x - 43y + 14 = 0$.

16. $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 8x + 14y + 7 = 0$.

17. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

18. Una cuerda pasa por el foco F de una sección cónica tiene sus extremos P_1 y P_2 sobre la curva. Probar que

$$\frac{1}{d(F, P_1)} + \frac{1}{d(F, P_2)} = \textit{constante}.$$

19. Hallar la ecuación de (la recta que contiene a) la cuerda de la curva $4x^2 - 3y^2 = 36$, si se sabe que el punto medio de la cuerda es (4, 2).

20. Sea la ecuación de una elipse $x^2 + xy + 2y^2 - x + 3y + F = 0$.

Hallar los valores de F para los cuales la curva es

a) una elipse;

b) una elipse punto, ¿cuál es el punto?;

c) una elipse sin puntos.

RESPUESTAS

1. Elipse: $\dfrac{x''^2}{2} + y''^2 = 1.$ **2.** Hipérbola: $\dfrac{y''^2}{3} - \dfrac{x''^2}{2} = 1.$

3. Parábola: $x''^2 = \frac{1}{\sqrt{10}} y''.$

4. Parábola dos rectas paralelas: $y'' = -\frac{1}{\sqrt{13}}$, $y'' = \frac{2}{\sqrt{13}}$, o en coordenadas XY:

$$2x - 3y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 2 = 0.$$

5. Hipérbola: $x''^2 - y''^2 = 1.$

6. Elipse: $\dfrac{x''^2}{10} + \dfrac{y''^2}{62} = 1.$

7. Hipérbola dos rectas.

8. Elipse punto: $\dfrac{x''^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{y''^2}{\frac{1}{4}} = 0$, o $(x'', y'') = (0, 0).$

9. Parábola: $y''^2 = \sqrt{2}x''.$

10. Elipse sin puntos : $\dfrac{x''^2}{2} + \dfrac{y''^2}{2} = -1.$

11. Hipérbola dos rectas que se cortan.

12. Elipse. **13.** Elipse sin puntos.

14. Hipérbola. **15.** Parábola.

16. Elipse punto. **17.** Parábola: dos rectas paralelas.

19. $y = \dfrac{1}{3}(8x - 26).$

20. a) $F < 2$,

b) $F = 2$ la elipse punto es $(1, -1)$

c) $F > 2$.

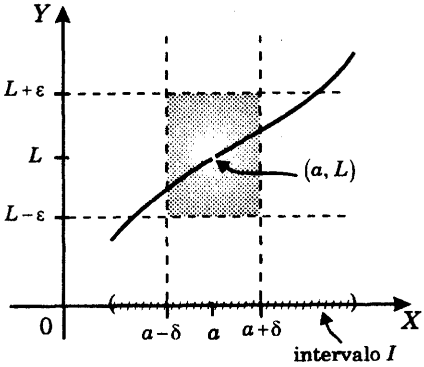
Capítulo 6

Límites de Funciones

6.1 DEFINICION. Consideremos un intervalo abierto I que contiene al punto a. Sea $f(x)$ una función a valores reales definida en todo punto x de I, $x \neq a$. Decimos que un número real L *es el límite de* $f(x)$ *en* a, o que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende al punto* a, si dado $\varepsilon > 0$, exista un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, x en I implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En este caso escribimos $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Consideremos la gráfica de la función $f(x)$ y ubiquemos al punto (a, L).



La afirmación que L es el límite de $f(x)$ en a significa que para cada $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, debe existir un número $\delta > 0$ tal que todos los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x)$, con $x \neq a$, deben encontrarse en el rectángulo comprendido por las rectas $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $y = L - \varepsilon$, $y = L + \varepsilon$. Intuitivamente, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L tanto como se quiera, cuando x se aproxima al punto a, pero siempre con la condición de que x sea distinto de a.

EJEMPLO 1. Usando la definición de límite, determinar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

SOLUCION.

1. En primer lugar estimamos por simple inspección el posible límite.
   Ahora bien, si x se aproxima a 1, tanto en el numerador $x^3 - 1$ como el denominador $x - 1$ se aproximan a 0, y por consiguiente, el cociente se aproxima a la expresión $\frac{0}{0}$, que no representa ningún número real. Para obviar esta dificultad, observemos que, cuando $x \neq 1$, se tiene

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1,$$

   y el segundo miembro se aproxima a $(1)^2 + (1) + (1) = 3$, si x tiende a 1. Así, $L = 3$ es el posible límite.

2. Enseguida probaremos que, en verdad, se tiene $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$, de acuerdo a la definición de límite de una función. O sea que dado $\varepsilon > 0$ debemos hallar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$ implica que

$$\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon$$

   Sea dado $\varepsilon > 0$. Para hallar δ vamos a estimar el término $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 3$, $x \neq 1$.

   Se tiene $$\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 = x^2 + x - 2 = (x^2 - 1) + (x - 1) = (x-1)(x+2)$$

   Luego $$\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| = |x - 1|\,|x + 2| \qquad \text{para } x \neq 1 \tag{1}$$

   Un primer paso consiste en controlar el término $|x + 2|$. Si, por ejemplo, se cumple la condición $$|x - 1| \leq 1. \tag{2}$$

   o, equivalentemente $0 \leq x \leq 2$, entonces $2 \leq x + 2 \leq 4$, y por lo tanto $|x + 2| \leq 4$.

   Así, tenemos que $$|x - 1|\,|x - 2| \leq 4|x - 1| \tag{3}$$

   siempre que $0 < |x - 1| \leq 1$.

Puesto que $4|x-1|<\varepsilon$ es equivalente a $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ se tiene que para cualquier $0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{4}$, la relación $0<|x-1|<\delta$ implica que

$$4|x-1|<4\delta\leq\varepsilon \tag{4}$$

Finalmente, para que se cumplan simultáneamente (3) y (4) bastará tomar $0<\delta\leq \text{mínimo}\{1,\varepsilon/4\}$. Luego si, por ejemplo, $\delta=\text{mínimo}\{1,\varepsilon/4\}$, entonces de (1), (3) y (4) se sigue $0<|x-1|<\delta$ implica que

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\delta, \text{ y así hemos probado que } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3.$$

EJEMPLO 2. Se demostrará posteriormente que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

EJEMPLO 3. La función $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\neq 0$, no posee límite cuando x tiende a 0.

Observación. La función $f(x)$ puede o no estar definida en el punto a. No obstante, para la definición de $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ *no requerimos el valor de* $f(a)$. En consecuencia, si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f(x)=g(x)$ para todo $x\neq a$, y existe el límite de una de ellas cuando x tiende al punto a, entonces se cumple $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$.

Por ejemplo, las funciones $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $x+2$ coinciden en todo $x\neq 2$.

Luego $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$.

6.2 PROPIEDADES SOBRE LIMITES DE FUNCIONES

PROPIEDAD 1. Límite de una función constante. Si $f(x)=c$ es una función constante, entonces para cualquier a se cumple

$$\lim_{x\to a} c=c$$

PROPIEDAD 2. Límite de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones a valores reales definidas en todo $x\neq a$ de un intervalo I que contiene al punto a, entonces se cumplen

$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\ , \quad \text{cuando} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0,$$

en el sentido de que si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces también existen los límites indicados en los primeros miembros y, además, se verifican las igualdades.

PROPIEDAD 3. Límite de una función polínomica.

Sea $f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ una función polinómica, donde b_0, b_1, ... , b_n, son constantes reales. Entonces para todo número real a cumple

$$\lim_{x\to a} \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right) = b_0 + b_1 a + \ldots + b_n a^n$$

PROPIEDAD 4. Límite de una función racional.

Para todo número a tal que $c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n \neq 0$ se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n} = \frac{b_0 + b_1 a + \ldots + b_m a^m}{c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n}$$

PROPIEDAD 5. Límite de potencias y raíces. Si n es un número entero > 0 se cumplen

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n , \qquad \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

y en general, si p y q son dos números enteros > 0, entonces se cumple

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{p/q} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{p/q}$$

en el sentido de que si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces existe el límite del primer miembro y se cumple la igualdad.

Queda bien entendido que si n o q son números pares, debe asumirse que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$, a fin de que las raíces $\sqrt[n]{L}$ o $(L)^{p/q}$ estén definidas.

PROPIEDAD 6. Traslación de la variable independiente

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

EJEMPLO 1. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

SOLUCION. Si hacemos $x = 1$ obtenemos $\dfrac{1}{0}-\dfrac{3}{0}$ que no representa ningún número real.

Procedemos a simplificar la expresión

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{\left(1-x^3\right)-3(1-x)}{(1-x)\left(1-x^3\right)} = \frac{(1-x)\left(1+x+x^2-3\right)}{(1-x)(1-x)\left(1+x+x^2\right)},$$

donde se ha hecho uso de la factorización $1-x^3 = (1-x)\left(1+x+x^2\right)$.

Luego se tiene

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1-x)\left(x^2+x-2\right)}{(1-x)^2\left(1+x+x^2\right)} = \frac{-(1-x)(1-x)(x+2)}{(1-x)^2\left(1+x+x^2\right)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}$$

para todo $x \neq 1$.

Tomando límites obtenemos $\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3} = -\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(1+x+x^2\right)} = -\dfrac{3}{3} = -1.$

EJEMPLO 2. Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^4-16}$

SOLUCION. Aplicando la propiedad (6), si hacemos $x = 2+h$, se tiene que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{(2+h)^4-16} = \frac{(2)^3+3(2)^2h+3(2)h^2+h^3-8}{(2)^4+4(2)^3h+6(2)^2h^2+4(2)h^3+h^4-16}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(12+6h+h^2\right)}{h\left(36+24h+8h^2+h^3\right)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

PROPIEDAD 7. Teorema del sandwich.

Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tres funciones tales que

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq a$, y

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

Entonces se cumple $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

PROPIEDAD 8. Límites trigonométricos. Se cumplen

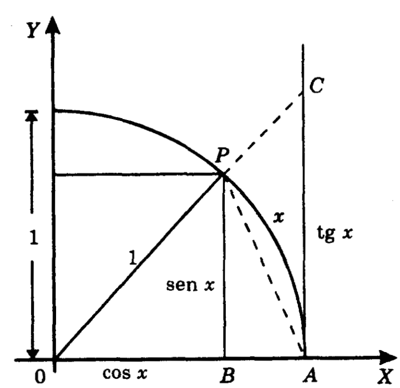
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 , \qquad \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a , \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

EJEMPLO 3. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

SOLUCION. Si x designa un ángulo medido en radianes probaremos que se cumplen las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2} x^2 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad (1)$$

para todo x tal que $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$



Tracemos el círculo unitario con centro en el origen del sistema de coordenadas rectangulares XY.

Sea $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ el arco $\widehat{AP}$ medido en radianes, donde

$P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $A = (1, 0)$,

$B = (\cos x, 0)$, $C = (1, \operatorname{tg} x)$ y C es el punto de intersección de la recta que contiene al radio OP con la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

Se cumple Area del Δ POA < Area del sector circular POA < Area del Δ COA,

Area del $\Delta POA = \frac{1}{2}$ (base) $\times$ (altura) $= \frac{1}{2}(1)\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$,

Area del sector circular $POA = \frac{1}{2}(\text{arco}) \times (\text{radio})^2 = \frac{1}{2} x (1)^2 = \frac{1}{2} x$,

y Area del $\Delta COA = \frac{1}{2}$(base) $\times$ (altura) $= \frac{1}{2}(1)\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

Luego tenemos que $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{(dividiendo entre } \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x\text{)}$$

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \text{(tomando inversos)} \qquad \textbf{(2)}$$

De $d(A, P) <$ arco AP se sigue que $\sqrt{(1-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} < x$, y elevando al cuadrado

$$1 - 2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x < x^2$$

$$2 - 2\cos x < x^2$$

de donde $\quad 1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x.$ **(3)**

De este modo de (2) y (3) tenemos ahora que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \textbf{(4)}$$

Supongamos luego que $-\pi/2 < x < 0$. Entonces $0 < -x < \pi/2$ y (4) se cumple para el ángulo $-x$

$$1 - \tfrac{1}{2}(-x)^2 < \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} < 1$$

o

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \qquad \textbf{(5)}$$

puesto que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

Juntando (4) y (5) vemos que las desigualdades (1) se cumplen para todo x tal que

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, $\quad 1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1, \qquad 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2},$

y puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 1$, por el teorema del Sandwich (propiedad 7), llegamos a

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

que era lo que se queríamos demostrar.

EJEMPLO 4. Probar que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$

SOLUCION. Se tiene $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x\to 0} x \times \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(\lim\limits_{x\to 0} x\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 0 \times 1 = 0$

puesto que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, por el ejemplo 3.

EJEMPLO 5. Probar que

(1) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ **(2)** $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

SOLUCION.

(1) Haciendo $x = a + h$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h$$

Por la propiedad (6)

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \lim_{h\to 0} (\operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h)$$

$$= (\operatorname{sen} a)\left(\lim_{h\to 0} \cos h\right) + (\cos a)\left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\right)$$

Pero $\lim\limits_{h\to 0} \cos h = 1$ y $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen} h = 0$, por los ejemplos 3 y 4, respectivamente.

Por lo tanto tenemos $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

(2) Se tiene

$$\lim_{x\to a} \cos x = \lim_{h\to 0} \cos(a+h) = \lim_{h\to 0} (\cos a \cos h - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} h)$$

$$= \cos a \times \lim_{h\to 0} \cos h - \operatorname{sen} a \times \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h = \cos a \times 1 - \operatorname{sen} a \times 0 = \cos a.$$

PROPIEDAD 9. Cambio de escala en la variable independiente.

Si $k \neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} f(kx) = \lim_{x\to ka} f(x)$$

EJEMPLO 6. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\times\dfrac{\operatorname{sen}5x}{5x}}{3\times\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}}=\frac{5}{3}\times\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}}=\frac{5}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{5}{3},$$

puesto que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}kx}{kx}=\lim\limits_{x\to k\times 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ para $k=3,5$ por la propiedad 9.

PROPIEDAD 10. Límite de la composición de dos funciones o de cambio de variable.

Si $x=f(y)$ es una función de y, $g(x)$ es una función de x, y además $\lim\limits_{y\to b}f(y)=a$ con $f(y)\neq a$ para todo $y\neq b$, entonces

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{y\to b}g(f(y))$$

El cambio de variable es $x=f(y)$.

EJEMPLO 7. Encontrar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

SOLUCION. Puesto que tenemos raíces de orden 2 y 3, efectuamos el cambio de variable

$$1+x=y^6 \qquad \text{o} \qquad x=y^6-1$$

Puesto que $\lim\limits_{y\to 1}y^6-1=0$, $\quad y^6-1\neq 0$ para todo $y\neq 1$,

podemos aplicar la propiedad 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y^6}-1}{\sqrt[3]{y^6}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

6.3 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+5x-7}{x^2+1}$

SOLUCION. Puesto que $(-1)^2+1=2\neq 0$, se tiene directamente

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+5x-7}{x^2+1} = \frac{2(-1)^3+5(-1)-7}{(-1)^2+1} = -\frac{14}{2} = -7.$$

PROBLEMA 2. Calcular $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

SOLUCION. Sustituyendo $x=a$ se obtiene $\dfrac{0}{0}$. Para cancelar el factor $x-a$, efectuamos las descomposiciones

$$\begin{aligned} x^2-(a+1)+a &= x^2-x-ax+a = x(x-1)-a(x-1) = (x-a)(x-1) \\ x^3-a^3 &= (x-a)\left(x^2+ax+a^2\right) \end{aligned}$$

Se tiene entonces $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-1}{x^2+ax+a^2} = \dfrac{a-1}{3a^2}$

PROBLEMA 3. Hallar $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

SOLUCION. Efectuando la sustitución $x=a+h$ se tiene

$$\begin{aligned} x^m-a^m &= (a+h)^m-a^m = \left(a^m+ma^{m-1}h+\left(\text{términos en } h^2\right)\right)-a^m \\ &= ma^{m-1}h+\left(\text{términos en } h^2\right) = h\left(ma^{m-1}+(\text{términos en } h)\right) \end{aligned}$$

e igualmente $\quad x^n-a^n = h\left(na^{n-1}+(\text{términos en } h)\right)$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^m-a^m}{(a+h)^n-a^n} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ma^{m-1}+(\text{términos en } h)}{na^{n-1}+(\text{términos en } h)} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n}a^{m-n} \end{aligned}$$

ya que $\lim\limits_{h\to 0}$ (términos en h) $=0$.

PROBLEMA 4. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

SOLUCION. Haciendo $x = 1+h$ tenemos

$$x^{n+1}-(n+1)x+n = (1+h)^{n+1}-(n+1)(1+h)+n$$

$$= 1+(n-1)h+\frac{(n+1)nh^2}{2}+\ldots+h^{n+1}-(n+1)(1+h)+n = h^2\left[\frac{(n-1)n}{2}+(\text{ términos en } h)\right]$$

y $\quad (x-1)^2 = h^2$.

Luego $\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{(n+1)n}{2}+\text{términos en } h\right] = \dfrac{n(n+1)}{2}$

PROBLEMA 5. Hallar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

SOLUCION. Efectuamos la sustitución $x = y^3$. Se tiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{\left(y^3-1\right)^2}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)^2}{(y-1)^2\left(y^2+y+1\right)^2} = \lim_{y\to 1}\frac{1}{\left(y^2+y+1\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

PROBLEMA 6. Hallar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

SOLUCION. Hagamos el cambio de variable $x = y^{mn}$. Luego

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{y\to 1}\frac{y^n-1}{y^m-1} = \frac{n}{m},$$

en donde para obtener la última igualdad hemos hecho uso del problema 3, con $a = 1$.

PROBLEMA 7. Hallar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} 2\pi x}{\operatorname{sen} 3\pi x}$

SOLUCION. Hagamos el cambio de variable $x = h + 1$. Se tiene entonces

$$\operatorname{sen} 2\pi x = \operatorname{sen}(2\pi h + 2\pi) = \operatorname{sen}(2\pi h)\cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi)\cos(2\pi h) = \operatorname{sen}(2\pi h)$$

y $$\operatorname{sen} 3\pi x = \operatorname{sen}(3\pi h + 3\pi) = \operatorname{sen}(3\pi h)\cos(3\pi) + \operatorname{sen}(3\pi)\cos(3\pi h) = -\operatorname{sen}(3\pi h)$$

ya que $$\begin{cases} \cos(2\pi) = -\cos(3\pi) = 1 \\ \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen}(3\pi) = 0 \end{cases}$$

Luego $$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{\operatorname{sen} 3\pi x} = -\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\pi h}{\operatorname{sen} 3\pi h} = -\lim_{h \to 0} \frac{2 \times \dfrac{\operatorname{sen} 2\pi h}{2\pi h}}{3 \times \dfrac{\operatorname{sen} 3\pi h}{3\pi h}} = -\frac{2}{3}$$

PROBLEMA 8. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

SOLUCION. Se tiene

$$\cos mx - \cos nx = \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{\cos mx + \cos nx} = \frac{\left(1 - \cos^2 nx\right) - \left(1 - \cos^2 mx\right)}{\cos mx + \cos nx} = \frac{\operatorname{sen}^2 nx - \operatorname{sen}^2 mx}{\cos mx + \cos nx}$$

Luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{n^2 \left[\dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx}\right]^2 - m^2 \left[\dfrac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right]^2}{\cos mx + \cos nx} = \frac{1}{2}\left(n^2 - m^2\right)$$

PROBLEMA 9. Hallar $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$

SOLUCION. Haciendo $x = -2 + h$ se tiene

$$\lim_{x \to -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi(-2 + h)}{h \times \cos \pi(-2 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(-2\pi)\cos \pi h + \cos(-2\pi)\operatorname{sen} \pi h}{h \times \cos \pi(-2 + h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\pi \dfrac{\operatorname{sen} \pi h}{\pi h}}{\cos \pi(-2 + h)} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

PROBLEMA 10. Hallar $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

SOLUCION. Se tiene $x = h+1$,

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{h\to 0} -h\frac{\operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi(h+1)}{2}\right]}{\cos\left[\dfrac{\pi(h+1)}{2}\right]} = \lim_{h\to 0} -h\frac{\cos\dfrac{\pi h}{2}}{-\operatorname{sen}\dfrac{\pi h}{2}} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\dfrac{\pi h}{2}}{\dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi h}{2}}{\dfrac{\pi h}{2}}\right]} = \frac{2}{\pi}$$

PROBLEMA 11. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)\times\frac{2}{4}\left[\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 12. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$

SOLUCION. Hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{sen} y$ o $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

Luego $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}} = 1.$$

y si $y = \operatorname{arc\,tg} x$, entonces $x = \operatorname{tg} y$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

PROBLEMA 13. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arc tg } 5x}{\text{sen } 3x}$

SOLUCION.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{arc tg } 5x}{\text{sen } 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{5} \times \frac{\text{arc tg } 5x}{5x} \times \frac{1}{\dfrac{\text{sen } 3x}{3x}} = \frac{3}{5} .$$

PROBLEMA 14. Hallar $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)}$

SOLUCION. Haciendo $x = \dfrac{\pi}{3} + h$ tenemos que

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos h - \text{sen}\frac{\pi}{3} \text{ sen } h = \frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen } h$$

Luego

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + h\right)}{\text{sen } h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h + \sqrt{3}\text{ sen } h}{\text{sen } h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\text{sen } h} + \sqrt{3} \right] = \sqrt{3} ,$$

puesto que

$$\lim_{h \to 0} \frac{2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\text{sen } h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{\text{sen } h}{h}} \times \left[\frac{\text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}} \right] = \frac{0}{1} \times 1 = 0 .$$

PROBLEMA 15. Unicidad del límite.

Probar que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$,

entonces se cumple que $L_1 = L_2$.

SOLUCION. Por reducción al absurdo. Supongamos que fuese $L_1 \neq L_2$.

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$. Entonces por definición de límite existen

$$\delta_1, \delta_2 > 0 \quad \text{tales que} \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

y $$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon.$$

Luego para cualquier x tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ y δ_2, se cumplen las dos desigualdades

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon$$

y $$|f(x) - L_2| < \varepsilon,$$

y por lo tanto

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |L_1 - L_2|,$$

o sea $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$,

lo cual es una contradicción. Luego $L_1 = L_2$.

PROBLEMA 16. Probar que si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Pero $f(x) = c$, de modo que $\quad |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Luego para cualquier $\delta > 0$ (por ejemplo $\delta = 1$) se cumplirá la implicación deseada.

Por lo tanto se tiene que $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

PROBLEMA 17. Producto de límites.

Probar que $$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x).$$

SOLUCION. Llamemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$.

Para probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = L_1 L_2$ debemos establecer que dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x)g(x) - L_1 L_2| < \varepsilon$.

Sea pues dado $\varepsilon > 0$. Elijamos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\quad \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0|L_1| + \varepsilon_0|L_2| < \varepsilon$

(Bastará tomar $0 < \varepsilon_0 <$mínimo $\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{|L_1|+|L_2|+1}\right\}$, ya que entonces

$$\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0|L_1| + \varepsilon_0|L_2| = \varepsilon_0(\varepsilon_0 + |L_1| + |L_2|)$$

$$< \varepsilon_0(1+|L_1|+|L_2|) < \frac{\varepsilon}{1+|L_1|+|L_2|}(1+|L_1|+|L_2|) = \varepsilon \ )$$

Escribimos

$$f(x)g(x) - L_1L_2 = (f(x)-L_1)g(x) + L_1(g(x)-L_2) \quad \text{(restando y sumando } L_1g(x))$$
$$= (f(x)-L_1)(g(x)-L_2) + (f(x)-L_1)L_2 + L_1(g(x)-L_2)$$
$$\text{(restando y sumando } (f(x)-L_1)L_2\ )$$

y obtenemos

$$|f(x)g(x)-L_1L_2| \le |f(x)-L_1||g(x)-L_2| + |f(x)-L_1| \times |L_2| + |L_1| \times |g(x)-L_2| \quad (1)$$

Por otra parte, para ε_0 se tiene que existen δ_1 y $\delta_2 > 0$ tales que

$0 < |x-a| < \delta_1$ implica $|f(x)-L_1| < \varepsilon_0$ (definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$),

y $0 < |x-a| < \delta_2$ implica $|g(x)-L_2| < \varepsilon_0$ (definición de $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$).

Luego si tomamos $\delta =$mínimo $\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, las dos implicaciones se cumplen para todo x tal que $0 < |x-a| < \delta$, y por consiguiente en (1) se tiene para tales x

$$|f(x)g(x)-L_1L_2| < \varepsilon_0{}^2 + \varepsilon_0|L_2| + \varepsilon_0|L_1| < \varepsilon$$

(la última desigualdad se cumple por la elección de ε_0).

Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = L_1L_2$.

PROBLEMA 18. Probar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $A < L < B$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $A < f(x) < B$.

SOLUCION. Sea $\varepsilon =$mínimo $\{L-A, B-L\} > 0$.

Luego por definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - L| < \varepsilon,$$

o
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon \le L - A$ y $B - L$, se tiene que

$$L - (L - A) < L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon < L + (B - L)$$

o
$$A < f(x) < B, \quad \text{para todo } x \text{ tal que} \quad 0 < |x - a| < \delta .$$

PROBLEMA 19. Probar que si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

SOLUCION. Llamemos $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$.

Paso 1. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica $|g(x)| \ge \dfrac{|M|}{2}$.

En efecto, para $\varepsilon_1 = \dfrac{|M|}{2} > 0$ por definición de límite existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica $|g(x) - M| < \varepsilon_1 = \dfrac{|M|}{2}$, y de esta desigualdad tenemos que

$$|g(x)| = \left| M - (M - g(x)) \right| \ge |M| - |g(x) - M| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2},$$

o sea que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica $|g(x)| \ge \dfrac{|M|}{2}$.

Paso 2. Prueba de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|g(x)\, M|} = \frac{|M - g(x)|}{|g(x)|\,|M|} \le \frac{|g(x) - M|}{\frac{|M|}{2}|M|}$$

para $0 < |x - a| < \delta_1$, por el paso 1.

Por otra parte, de $\lim_{x\to a} g(x) = M$ para $\varepsilon_2 = \varepsilon\frac{|M|^2}{2} > 0$ se sigue que existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \text{implica} \quad |g(x) - M| < \varepsilon_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Luego si tomamos $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ se tiene que $0 < |x-a| < \delta$ implica

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| \leq \frac{|g(x)-M|}{\frac{|M|}{2}} < \frac{\varepsilon\frac{|M|^2}{2}}{\frac{|M|^2}{2}} = \varepsilon\,,$$

puesto que las dos implicaciones (1) y (2) se verifican simultáneamente.

Así, se ha probado que $0 < |x-a| < \delta$ implica $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon$, lo cual significa que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

PROBLEMA 20. Cociente de límites.

Probar que $\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad$ si $\quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

SOLUCION. Se obtiene de $\quad \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)} \quad$ y usando los problemas 17 y 19.

PROBLEMA 21. Potencia de límites.

Probar que $\quad \lim_{x\to a} f(x)^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ para todo entero $n \geq 0$.

SOLUCION. .Sea $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Tomemos $B > 0$ tal que $|L| < B$. Por el problema 18, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica $|f(x)| < B$.

Usando la identidad

$$u^n - v^n = (u-v)\left(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}\right)$$

con $u = f(x)$ y $v = L$, tenemos

$$\left|f(x)^n - L^n\right| \le \left|f(x) - L\right| M \quad \text{para } 0 < |x-a| < \delta_1 \qquad \textbf{(1)}$$

donde $M = B^{n-1} + B^{n-2}|L| + \ldots + B|L|^{n-2} + |L|^{n-1}$.

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \text{implica} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \textbf{(2)}$$

Si tomamos $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $0 < |x-a| < \delta$ implica

$$\left|f(x)^n - L^n\right| \le |f(x) - L|\, M < \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon,$$

ya que entonces las dos desigualdades (1) y (2) se verifican simultáneamente.

Así, $\qquad 0 < |x-a| < \delta \quad$ implica $\quad \left|f(x)^n - L^n\right| < \varepsilon,$

y por lo tanto, hemos probado que

$$\lim_{x\to a} f(x)^n = L^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n.$$

PROBLEMA 22. Probar que $\lim\limits_{x\to a}\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m\right) = b_0 + b_1 a + \ldots + b_m a^m$.

SOLUCION. Es fácil ver que

$\lim\limits_{x\to a} b_i = b_i$ (límite de una función constante)

y $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ (potencia de límites)

y por lo tanto

$$\lim_{x\to a}\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m\right) = \lim_{x\to a} b_0 + \lim_{x\to a} b_1 \times \lim_{x\to a} x + \ldots + = b_0 + b_1 a + \ldots + b_m a^m$$

PROBLEMA 23. Raíz de límites.

Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

SOLUCION. Sea $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Consideremos los tres casos siguientes:

Caso 1. n es un *entero cualquiera* ≥ 1 y $L > 0$.

Por el problema 18 (tomando $A = \frac{1}{2}L < L$) existe un δ_1 tal que $\dfrac{L}{2} < f(x)$ para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Luego, en particular $\qquad f(x) > 0 \quad$ si $\quad 0 < |x - a| < \delta_1$.

Usando la identidad

$$u - v = \frac{u^n - v^n}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

con $u = \sqrt[n]{f(x)}$ y $v = \sqrt[n]{L}$, tenemos que

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} = \frac{f(x) - L}{\sqrt[n]{f(x)^{n-1}} + \sqrt[n]{f(x)^{n-2}}\, L + \ldots + \sqrt[n]{L^{n-1}}}.$$

Luego,
$$\left|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L}\right| \leq \frac{|f(x) - L|}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \qquad (*)$$

ya que $\quad \sqrt[n]{f(x)^{n-1}} + \sqrt[n]{f(x)^{n-2}}\, L + \ldots + \sqrt[n]{L^{n-1}} > \sqrt[n]{L^{n-1}} \quad$ cuando $\quad f(x), L > 0$.

Si ahora $\varepsilon > 0$ es dado, de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se sigue que existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$0 < |x - a| < \delta_2$ implica $\qquad |f(x) - L| < \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} \qquad (**)$

Tomando $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ vemos que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces se cumplen (*) y (**) a la vez y por lo tanto

$$\left|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L}\right| \leq \frac{|f(x) - L|}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} < \frac{\varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}}}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} = \varepsilon.$$

Así, en el presente caso hemos demostrado que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

Caso 2. n es impar y $L < 0$.

Entonces $-L > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-L}$, por el caso 1.

Luego, siendo n un número impar se tiene

$$-\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = -\sqrt[n]{L} \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Caso 3. n es *impar* y $L = 0$

Procedemos a probar directamente que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{0} = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L = 0$, para $\varepsilon^n > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - 0| < \varepsilon^n$, y tomando raíz enésima $\left|\sqrt[n]{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$.

Esto demuestra que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = 0$.

PROBLEMA 24. Probar que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCION. Para $x \neq 0$ tenemos $\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, puesto que $\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1$.

Luego, si $\varepsilon > 0$ es dado, tomando $\delta = \varepsilon$ tenemos que

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{implica} \quad \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon ,$$

y así se tiene que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

PROBLEMA 25. Demostrar que si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$

SOLUCION. Haciendo $u = f(x)$, $v = L$, en la desigualdad $\big||u| - |v|\big| \leq |u - v|$ obtenemos

$$\big||f(x)| - |L|\big| \leq |f(x) - L| \tag{*}$$

Ahora bien, si $\varepsilon > 0$ es dado, de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$, y empleando (*) tenemos $\big||f(x)| - |L|\big| < \varepsilon$.

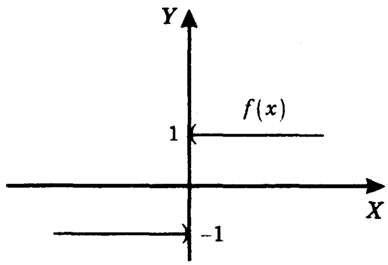
Así, se ha probado que $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

PROBLEMA 26. Probar que no existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

SOLUCION. Sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Entonces

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \quad (\text{pues } |x| = x) \\ -1 & \text{si } x < 0 \quad (\text{pues } |x| = -x) \end{cases}$$

Observación. La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura adyacente. Cuando $0<|x|$ entonces hay números $x>0$ y $x<0$, y correspondientemente $f(x)$ toma los valores 1 y -1. Así, para valores de x cercanos a cero, no existe un número L al cual se aproximen los valores $f(x)$.



Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=L$.

Entonces para $\varepsilon=1$ existe un $\delta>0$ tal que $0<|x-0|<\delta$ implica $\left|\dfrac{|x|}{x}-L\right|<1$.

Luego se tiene $\quad$ si $0<x<\delta$ entonces $|1-L|<1$ $\quad$ **(1)**

si $-\delta<x<0$ entonces $|-1-L|<1$ $\quad$ **(2)**

De (1) se sigue que $L>0$, en tanto que de (2) obtenemos $L<0$, lo cual es una contradicción.

PROBLEMA 27. Dar ejemplos de funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que no existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ pero

1) existe $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$ $\qquad$ **2)** existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$

SOLUCION. Tomemos $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=-\dfrac{|x|}{x}$.

Entonces por el problema 24 no existen $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Sin embargo

$$f(x)+g(x)=0=\text{constante} \qquad \text{y} \qquad f(x)\times g(x)=-1=\text{constante},$$

que sí tienen límites en 0.

PROBLEMA 28. Probar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$.

SOLUCION. Sea $L=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Si $\varepsilon>0$ es dado, entonces por definición de límite existe un $\delta>0$ tal que $\quad 0<|x-a|<\delta \quad$ implica $\quad |f(x)-L|<\varepsilon$

Luego si $0<|h|<\delta$ entonces $0<|(a+h)-a|<\delta$ implica $|f(a+h)-L|<\varepsilon$.

Esto demuestra que $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=L=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

PROBLEMA 29. Sea $k\neq 0$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(kx)=\lim\limits_{y\to ka} f(y)$.

SOLUCION. Llamemos $L=\lim\limits_{y\to ka} f(y)$. Si $\varepsilon>0$ es dado, entonces por definición de límite existe un $\delta>0$ tal que $0<|y-ka|<\delta$ implica $|f(y)-L|<\varepsilon$. Luego si $0<|x-a|<\dfrac{\delta}{|k|}$ entonces $0<|kx-ka|<\delta$ (multiplicando por $|k|>0$) implica $|f(kx)-L|<\varepsilon$.

Así, para $\delta_1=\dfrac{\delta}{|k|}$ tenemos que $0<|x-a|<\delta_1$ implica $|f(kx)-L|<\varepsilon$. Luego,

$$\lim_{x\to a} f(kx)=L=\lim_{y\to ka} f(y).$$

PROBLEMA 30. Teorema del Sandwich. Probar que si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son tres funciones tales que

(i) $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ para todo $x\neq a$, y

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$,

entonces se cumple $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$

SOLUCION. Sea $\varepsilon>0$. Por definición de límite, existen δ_1 y $\delta_2>0$ tales que

$$0<|x-a|<\delta_1 \text{ implica } |f(x)-L|<\varepsilon$$

y $$0<|x-a|<\delta_2 \text{ implica } |h(x)-L|<\varepsilon.$$

Luego si tomamos $\delta=\text{mínimo}\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces $0<|x-a|<\delta$ implica las desigualdades

$$|f(x)-L|<\varepsilon, \tag{1}$$

$$|h(x)-L|<\varepsilon \tag{2}$$

(1) y (2) se escriben $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$

y $L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$, respectivamente.

Luego, $L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$ (por hipótesis)

da $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ o $|g(x) - L| < \varepsilon$.

Así, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|g(x) - L| < \varepsilon$,

lo cual demuestra que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

PROBLEMA 31. Límite de la composición de dos funciones o de cambio de variable.

Si $x = f(y)$ es una función de y tal que $\lim\limits_{y \to a} f(y) = b$, $f(y) \ne b$ para todo $y \ne a$, probar que

$$\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{y \to a} g[f(y)].$$

SOLUCION. Llamemos $L = \lim\limits_{x \to b} g(x)$.

Si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - b| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - L| < \varepsilon \tag{1}$$

Por otra parte, de $\lim\limits_{y \to a} f(y) = b$, para $\delta > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |y - a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(y) - b| < \delta \tag{2}$$

Puesto que $f(y) \ne b$ cuando $y \ne a$, de (2) tenemos que

$$0 < |y - a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ 0 < |f(y) - b| < \delta$$

y de (1), a su vez

$$0 < |f(y) - b| < \delta \ \Rightarrow \ |g(f(y)) - L| < \varepsilon.$$

Luego $0 < |y - a| < \delta_1$ implica $|g(f(y)) - L| < \varepsilon$.

Así hemos probado que

$$\lim_{y \to a} g(f(y)) = L = \lim_{x \to b} g(x)$$

6.4 LIMITES UNILATERALES

DEFINICION.

(1) Sea $f(x)$ una función definida en todos los puntos x de algún intervalo abierto (a, c). Si L es un número real escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

y se lee

L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al punto a por la derecha, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(2) Sea $f(x)$ una función definida en todos los puntos x de algún intervalo abierto (c, a). Si L es un número real escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y se lee

L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al punto a por la izquierda, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $-\delta < x - a < 0$ *implica* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nota. Observemos que

1) $0 < x - a < \delta \iff a < x < a + \delta$ (x se encuentra a la derecha de a)

2) $-\delta < x - a < 0 \iff a - \delta < x < a$ (x se encuentra a la izquierda de a)

3) $0 < |x - a| < \delta \iff 0 < x - a < \delta$ o $-\delta < x - a < 0$

6.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Probar que $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$.

SOLUCION. Sea dado $\varepsilon > 0$. Debemos hallar con $\delta > 0$ tal que si

$$0 < x - 2 < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{x-2}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Pero si $0 < x - 2$ entonces $|x-2| = x - 2$ y $\dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$.

Luego $$\left|\frac{x-2}{|x-2|} - 1\right| = |1-1| = 0 < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para cualquier $\delta > 0$ (Por ejemplo, $\delta = 1$) se cumple la implicación (*).

Así, se tiene $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$.

PROBLEMA 2. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

1) $f(x) = g(x)$ para todo $x > a$ (o $f(x) = g(x)$ para todo $x < a$), y

2) existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (límite bilateral).

Probar que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$)

Nota. Este resultado es muy útil para calcular límites laterales.

SOLUCION. Escribimos $L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Sea $\varepsilon > 0$.

Entonces por definición de límite (bilateral) existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{implica} \quad |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| = |g(x) - L| < \varepsilon$, pues $f(x) = g(x)$ cuando $0 < x - a$ por la hipótesis (1).

Así, hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

PROBLEMA 3. Hallar los siguientes límites laterales

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$, (2) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

SOLUCION.

(1) Si $x > 0$ y está próximo a 0 (por ejemplo, si $0 < x < \pi/2$)

entonces $\operatorname{sen} x > 0$ y por lo tanto $\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $0 < x < \pi/2$.

Puesto que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, aplicando el problema 2 con $f(x) = \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ y $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

(2) Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ entonces $\operatorname{sen} x < 0$ y por lo tanto

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Aplicando el problema 2, se tiene $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x} = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = -1.$

PROBLEMA 4. Sea $[\![x]\!]$ la *función mayor entero* definida por $[\![x]\!] = n$ si $n \le x < n+1$ (así n es el mayor entero que cumple $n \le x$).

Sea $\qquad f(x) = -[\![x]\!] + [\![4-x]\!]$.

Hallar $\qquad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

SOLUCION.

(1) Si $3 < x < 4$ entonces $[\![x]\!] = 3$, y $[\![4-x]\!] = 0$.

Luego $f(x) = -[\![x]\!] + [\![4-x]\!] = -3 + 0 = -3$ si $3 < x < 4$,

y aplicando el problema 2, obtenemos $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} -3 = -3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} -3 = -3$$

(2) Si $2 < x < 3$ entonces $[\![x]\!] = 2$ y $[\![4-x]\!] = 1$.

Luego, $f(x) = -[\![x]\!] + [\![4-x]\!] = -2+1$ si $3 < x < 4$; y aplicando el problema 2

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} -1 = -1.$$

PROBLEMA 5. Probar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ si y solamente si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

SOLUCION.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Pero $0 < |x - a| < \delta$ equivale a $0 < x - a < \delta$ o $-\delta < x - a < 0$.

Luego, si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ **(1)**

o si $-\delta < x - a < 0$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ **(2)**

De (1) tenemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$; y de (2), $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen δ_1 y $\delta_2 > 0$ tales que $0 < x - a < \delta_1$

implica $|f(x) - L| < \varepsilon$ (definición de $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$)

y $-\delta_2 < x - a < 0$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$ (definición de $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$).

Tomando $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que $0 < |x - a| < \delta$,

que es equivalente a $0 < x - a < \delta$

o $-\delta < x - a < 0$, implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Así, hemos establecido que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

6.6 LIMITES QUE CONTIENEN INFINITO

DEFINICION. Escribimos

(1)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L ,$$

y decimos que *L es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$ o *cuando* x *crece indefinidamente*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(2)
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L ,$$

y decimos que *L es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $-\infty$ o *cuando* x *decrece indefinidamente*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N < 0$ tal que si $x < N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(3) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ ,$$

y decimos que *L es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* ∞ (sin signo), si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si $|x| > N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

TEOREMA.

(1) Sea n un número entero positivo. Entonces se cumplen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

(2) Se cumplen

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right), \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

6.7 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Probar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ para todo enero positivo n.

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $N = \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/n} > 0$.

Entonces, para todo $x > N$ se tiene que $x > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/n}$ o $x^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ o $\dfrac{1}{x^n} < \varepsilon$.

Luego $x > N$ implica $$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^n}\right| = \frac{1}{x^n} < \varepsilon ,$$

y esto demuestra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

De igual modo, si $x < -N < 0$ se tiene que $|x| > N = \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/n}$ o $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$.

Por tanto, $x < -N$ implica $$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon ,$$

y esto demuestra que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

PROBLEMA 2. Demostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

DEMOSTRACION. Llamemos $L = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Supongamos que $\varepsilon > 0$ es dado. Entonces por definición existe un número entero $N < 0$ tal que

$$x < N \quad \text{implica} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tomemos $\delta = -\dfrac{1}{N} > 0$. Luego tenemos que si $-\delta < y < 0$, o $\dfrac{1}{y} < N$ (pues ambos N e y son negativos), entonces

$$\left| f\left(\frac{1}{y}\right) - L \right| < \varepsilon,$$

y esto demuestra que

$$\lim_{y \to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = L.$$

PROBLEMA 3. Hallar $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$.

SOLUCION. Si hacemos $x = +\infty$ obtenemos *la forma indeterminada* $\infty - \infty$, de modo que es conveniente racionalizar la expresión. Tenemos

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 + x - 1\right) - \left(x^2 - x + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2}{\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 2/x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - 1} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

(Dividiendo entre $x > 0$ tanto el numerador como el denominador)

$$= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1.$$

PROBLEMA 4. Hallar

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 5}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$

SOLUCION.

(1) Si $x>0$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-5/x}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}} = 2$.

(2) Si $x<0$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{2x-5}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+3x-1}}{-x}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+5/x}{\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{(-x)^2}}}$$

(pues $-x>0$ puede introducirse dentro de una raíz par.)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+5/x}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}} = -2.$$

PROBLEMA 5. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(4x+5)^2(5x-7)^3}{2x^5-4x^3+x}$

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(4x+5)^2(5x-7)^3}{2x^5-4x^3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(4+\dfrac{5}{x}\right)^2\left(5-\dfrac{7}{x}\right)^3}{2-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}$$

(multiplicando por $\dfrac{1}{x^5}$ tanto el numerador como el denominador)

$$= \frac{(4)(5)}{2} = 10 .$$

PROBLEMA 6. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{sen}\sqrt{x+2}-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$

SOLUCION. Empleando la fórmula $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, tenemos que

$$0 \leq \left| \operatorname{sen}\sqrt{x+2} - \operatorname{sen}\sqrt{x} \right| = \left| 2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2} \right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} \right) \right| \qquad (1)$$

pues $|\cos y| \leq 1$.

Probaremos ahora que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} \right) = 0$ **(2)**

En efecto, si $t = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$ entonces

$$\lim_{x \to +\infty} t = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+2)-x}{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0$$

Luego, $0 = \lim\limits_{t \to 0} \operatorname{sen} t = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} \right)$.

De (1) y (2) se sigue por el teorema del Sandwich que

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x} \right) = 0.$$

PROBLEMA 7. Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x(x+a)} - x \right)$

SOLUCION. Tenemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x(x+a)} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x(x+a)} - x \right]\left[\sqrt{x(x+a)} + x \right]}{\left[\sqrt{x(x+a)} + x \right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{a}{2}.$$

6.8 LIMITES INFINITOS

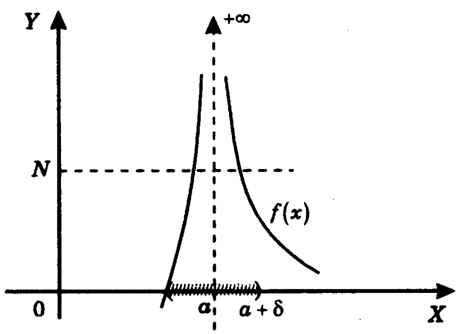
Escribimos

(1) $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ ,$$

y decimos que el *límite de* $f(x)$ *es* $+\infty$ o que $f(x)$ *crece indefinidamente cuando* x *tiende al punto* a, si para cada $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > N$.

(2) $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \ ,$$

y decimos que el *límite de* $f(x)$ *es* $-\infty$ o que $f(x)$ *decrece indefinidamente cuando* x *tiende al punto* a, si para cada $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) < N$.



Representación gráfica

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ entonces los valores $f(x)$ se hacen se hacen muy grandes cuando x se aproxima al punto a.

(3) $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \ ,$$

y decimos que el *límite de* $f(x)$ *es* ∞ (sin signo) si $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, o sea que se cumple que para cada $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x)| > N$.

(4)
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty ,$$

si para cada $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta$ implica $f(x) > N$.

(5)
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty ,$$

si para cada $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta$ implica $f(x) < N$.

(6)
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty ,$$

si para cada $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta$ implica $|f(x)| > N$.

(7)
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty ,$$

si para cada $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $-\delta < x - a < 0$ implica $f(x) > N$.

(8)
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty ,$$

si para cada $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $-\delta < x - a < 0$ implica $f(x) < N$.

(9)
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty ,$$

si para cada $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $-\delta < x - a < 0$ implica $|f(x)| > N$.

6.9 TEOREMA. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Entonces

(1) Si $g(x) > 0$ para todo $x \neq a$ en algún intervalo que contiene al punto a, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0, \\ -\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

(2) Si $g(x) < 0$ para todo $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } L > 0, \\ +\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

Nota. Las mismas conclusiones son válidas para los límites laterales.

6.10 TEOREMA. Si n es un número entero positivo se cumplen

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = \infty,$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty,$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

6.11 LIMITES DE LA FORMA $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = C$.

1. **El número e^x.** Una manera de definir e^x, donde x es un número real, es la siguiente: se consideran los números $S_n = 1 + \dfrac{x}{1!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, y se prueba que cuando los enteros n van creciendo, los números S_n se aproximan a un número real fijo, que denotamos con e^x. (Véase la sección 0.7 ó 11.16)

   Con la notación de las sucesiones tenemos:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(en notación de suma de series)}$$

   Si $x = 1$ tenemos $\quad e = e^1 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \ldots = 2.71823\ldots$

2. **El número a^x.** Se prueba que para cada $a > 0$ existe un único número real y, que se denota $y = \ln a$ (y se llama el *logaritmo natural de* a), tal que $a = e^y$. Se define $a^x = e^{xy} = e^{x\ln a}$, cuando $a > 0$.

3. **Propiedades.** Se cumplen las siguientes propiedades para todo número real a.

   (3.1) $e^a = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ (n número entero)

   (3.2) $e^a = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{y\to 0} (1 + ay)^{1/y}$

(3.3) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ con $f(x) \neq 0$ para $x \neq a$, entonces $e = \lim\limits_{x \to a} \left(1 + f(x)\right)^{1/f(x)}$

(3.4) $e^{x+y} = e^x . e^y$,

$\left(e^x\right)^y = e^{xy}$

(3.5) $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$, $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a \quad (a > 0)$

(3.6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(3.7) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

TEOREMA. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$.

Llamemos $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = C$, si el límite existe. Se cumplen

(1) Si L y M son números reales, entonces $C = L^M$.

(2) Si $L \neq 1$ y $M = \pm\infty$, entonces $C = L^M$.

(3) Si $L = 1$ y $M = \pm\infty$, entonces

$$C = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} \left[1 + f(x) - 1\right]^{g(x)} = \lim_{x \to a} \left\{\left[1 + f(x) - 1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)}$$

$$= e^{\left(\lim\limits_{x \to a} (f(x)-1)g(x)\right)}$$

6.12 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Sea n un número impar. Probar que se cumple $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.

SOLUCION.

Sea dado $N < 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $-\delta < x < 0$ entonces $\dfrac{1}{x^n} < N$.

Basta tomar $\delta = -\dfrac{1}{N^{1/n}} > 0$. En efecto, si $-\delta < x < 0$ o $\dfrac{1}{N^{1/n}} < x < 0$ entonces $\dfrac{1}{x} < N^{1/n}$, pues x y N son negativos, y $\dfrac{1}{x^n} < N$, pues n es impar.

Así, se ha probado que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.

PROBLEMA 2. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L < 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Si $g(x) < 0$ para todo $x \neq a$ en algún intervalo que contiene al punto a, probar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

SOLUCION. Dado $N > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica

$$\frac{f(x)}{g(x)} > N \, .$$

Paso 1. Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $f(x) < \dfrac{L}{2} < 0$.

En efecto, basta tomar $\varepsilon = -\dfrac{L}{2} > 0$ en la definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ para hallar un $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica $|f(x) - L| < -\dfrac{L}{2}$, o

$$L - \left(-\frac{L}{2}\right) < f(x) < L + \left(-\frac{L}{2}\right), \text{ y particular } f(x) < \frac{L}{2}.$$

Paso 2. Prueba de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Por el paso 1 elegimos un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $f(x) < \dfrac{L}{2} < 0$.

Puesto que para $x \neq a$ tenemos por hipótesis que $g(x) < 0$, dividiendo las desigualdades anteriores por $g(x)$ nos da

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L/2}{g(x)} > 0$$

Será pues suficiente demostrar que $\dfrac{L/2}{g(x)} > N$ para valores de x próximos al punto a, o equivalentemente, que $\dfrac{L}{2N} < g(x) < 0$. Pero $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. De manera que para

$\varepsilon = -\dfrac{L}{2N}$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que: $0 < |x-a| < \delta_2$ implica $|g(x) - 0| < -\dfrac{L}{2N}$ o $\dfrac{L}{2N} < g(x) < 0$, puesto que $g(x) < 0$.

Así, tomando $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ vemos que $0 < |x-a| < \delta$ implica $\dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{L/2}{g(x)} > N$. Y esto demuestra que efectivamente se cumple $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

PROBLEMA 3. Calcular $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-4}{(x-3)^3}$

SOLUCION. Se tiene $\lim\limits_{x \to 3^-} x - 4 = 3 - 4 = -1$.

Si $x < 3$ entonces $(x-3)^3 < 0$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} (x-3)^3 = 0$.

Luego $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{(x-4)}{(x-3)^3} = +\infty$, por el teorema 6.9.

PROBLEMA 4. Encontrar $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$.

SOLUCION. Tenemos $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \dfrac{\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2$

Si $x > 2$ entonces $\sqrt{x-2} > 0$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$.

Por lo tanto, por el teorema 6.9, obtenemos $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty$.

PROBLEMA 5. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

SOLUCION. Tenemos $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$. Además $\lim\limits_{x \to 0} (x-1) = -1$. Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, y por el teorema 6.9 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

PROBLEMA 6. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

SOLUCION. Tenemos $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)=\dfrac{2}{3}$ y $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Luego $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1\,,\quad \text{(por 6.11)}$$

PROBLEMA 7. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{sen}x)^{1/x}$.

SOLUCION. Empleando $\lim\limits_{x\to a}\left[1+f(x)\right]^{1/f(x)}=e$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$,

tenemos $$\lim_{x\to 0}(1+2\operatorname{sen}x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+2\operatorname{sen}x)^{1/(2\operatorname{sen}x)}\right]^{\frac{2\operatorname{sen}x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2\operatorname{sen}x)^{1/(2\operatorname{sen}x)}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x}{x}}=e^{2}\,.$$

PROBLEMA 8. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

SOLUCION. Se tiene $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{2}}=0$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}=2.$

Luego, $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2}}\right)^{\frac{2x}{x+1}}=0^{2}=0\,.$$

PROBLEMA 9. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$.

SOLUCION. Sea $h=e^{x}-1$ de modo que $h\to 0$ cuando $x\to 0$. Luego $x=\ln(1+h)$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\ln(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+h)}{h}}=1\,.$$

PROBLEMA 10. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{5+x\sqrt{x}}$.

SOLUCION. Tenemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{5+x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$.

PROBLEMA 11. Hallar los límites laterales de $f(x) = \dfrac{x+|\operatorname{sen} x|}{|x|}$ en el punto $x = 0$.

SOLUCION.

(1) Tenemos $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

luego $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$.

(2) y por otra parte $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x}{-x} = \lim\limits_{x\to0^-} -1 = -1$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} = \lim_{x\to0^-} \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \lim_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

y luego $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -1+1 = 0$.

PROBLEMA 12. Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$.

SOLUCION. Se tiene

$$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}} + \sqrt{1}}$$

Luego $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$.

PROBLEMA 13. Hallar $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCION. Multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{1-x}+3\right)\left(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)$

resulta $$-\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}.$$

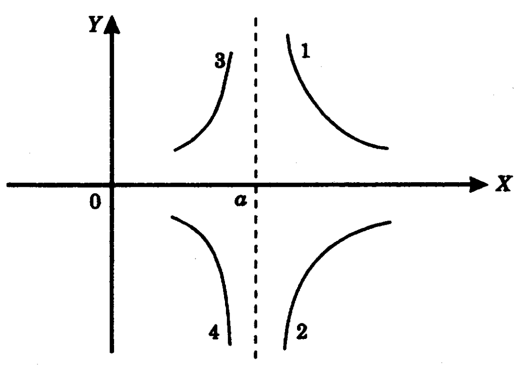
Luego el límite es -2.

6.13 ASINTOTAS DE UNA CURVA

(1) Decimos que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical de la gráfica de la función* $f(x)$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(2) Decimos que la recta $y = mx + b$ *es una asíntota de la gráfica de la función* $f(x)$ si se cumple al menos una de las condiciones siguientes:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx - b\right] = 0$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx - b\right] = 0$

Nota.

(1) En el primer caso decimos que la recta dada es una *asíntota oblicua a la derecha*, y en el segundo, que es una asíntota oblicua a la izquierda.

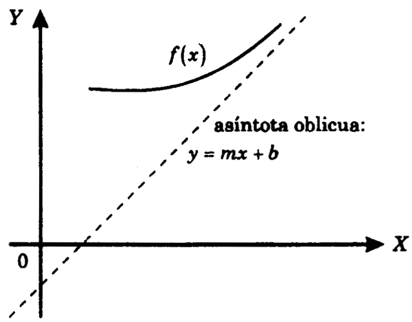
(2) Si $m = 0$, decimos que la asíntota es *horizontal*.

(3) Para calcular m y b se usan las ecuaciones

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

y análogamente si $x \to -\infty$.

Es claro que tales ecuaciones son equivalentes a la definición dada.



6.14 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar las asíntotas de la gráfica de la ecuación $xy^2 - 3y^2 - 4x = 8$ y trazar la gráfica.

SOLUCION. Tenemos $y = \pm\sqrt{\dfrac{4x-8}{x-3}}$. Por lo tanto, la gráfica de la ecuación dada se compone de la gráfica de las funciones:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{4x+8}{x-3}} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = -\sqrt{\frac{4x+8}{x-3}} \,.$$

Asíntotas verticales. Si $x > 3$, el radicando de las dos funciones es > 0 y

$$\lim_{x \to 3^+} f_1(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x \to 3^+} f_2(x) = -\infty,$$

ya que $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{4x+8} = \sqrt{20} > 0$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$, con valores $\sqrt{x-3} > 0$.

Por lo tanto, $x = 3$ es una asíntota vertical de $f_1(x)$ y de $f_2(x)$.

Asíntotas oblicuas. $y = mx + b$.

Cálculo de m.

$$\text{Para } f_1(x):\quad m_1 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4x+8}{x-3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{3}{x}}} = 0.$$

$$\text{Para } f_2(x):\quad m_2 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 0.$$

Cálculo de b.

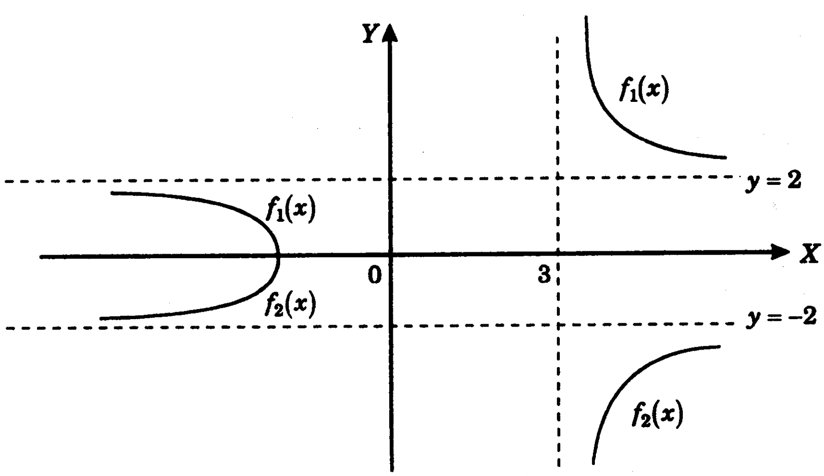
$$\text{Para } f_1(x):\quad b_1 = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f_1(x) - 0.x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{4x+8}{x-3}} = 2.$$

$$\text{Para } f_2(x):\quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f_2(x) - 0.x\right] \lim_{x\to\pm\infty} -\sqrt{\frac{4x-8}{x-1}} = -2.$$

Luego $\quad y = m_1x + b_1 = 2$,

$\qquad y = m_2x + b_2 = -2$.

Gráfica de la ecuación.



Debe observarse que $\frac{4x+8}{x-3} > 0$ si y solamente si

$$4x+8>0 \quad \text{y} \quad x-3>0, \text{ que equivale a } x>3,$$
$$4x+8<0 \quad \text{y} \quad x-3<0, \text{ que equivale a } x<-2,$$

y puesto que cuando $x=-2$, se tiene $f_1(-2)=f_2(-2)=0$,
las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ toman valores en los puntos x tales que

$$-\infty < x \le -2 \qquad \text{o} \qquad 3 < x < +\infty.$$

PROBLEMA 2. Hallar las asíntotas de la curva $y = \frac{x}{x^2-4x+3}$.

SOLUCION. Tenemos $y = \frac{x}{(x-1)(x-3)}$.

Asíntotas verticales.

1) Tenemos $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{x}{x-3}}{x-1} = -\infty,$

puesto que $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{x-3} = -\frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)=0$, con $x-1>0$.

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{x}{x-3}}{x-1} = +\infty,$

puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{x-3} = -\frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)=0$, $x-1<0$.

De igual modo

3) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = -\infty$

Luego $x=1$ y $x=3$ son asíntotas verticales de la curva dada.

Asíntotas Oblicuas. $y = mx + b$

Cálculo de *m*: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = 0$

Luego $m = 0$.

Cálculo de *b*: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [y - mx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} = 0$

Luego $b = 0$ y la asíntota es $y = 0$.

6.15 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Calcular $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

PROBLEMA 2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}$

PROBLEMA 3. Calcular $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

PROBLEMA 4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

PROBLEMA 5. Encontrar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$

PROBLEMA 6. Determinar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x^2}{x}$

PROBLEMA 7. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$

PROBLEMA 8. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

PROBLEMA 9. Dado

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallar $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

PROBLEMA 10. Evaluar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

PROBLEMA 11. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

PROBLEMA 12. Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

PROBLEMA 13. Hallar $\lim\limits_{s\to2^+} \left(\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{5}{s^2-4}\right)$

PROBLEMA 14. Hallar $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}$

PROBLEMA 15. Definir

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

PROBLEMA 16. Probar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases} 0 & \text{si } m<n \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{si } m=n \\ +\infty & \text{si } m>n \text{ y } \dfrac{a_0}{b_0}>0 \\ -\infty & \text{si } m>n \text{ y } \dfrac{a_0}{b_0}<0 \end{cases}$$

PROBLEMA 17. Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5-2x-x^2\right)$

PROBLEMA 18. Hallar $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{1/x}$ y $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{1/x^2}$

PROBLEMA 19. Hallar $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x(x-1)^3}$

PROBLEMA 20. Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+b & \text{si } x<2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Hallar el valor de b si se cumple $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x)+3$

PROBLEMA 21. Hallar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

PROBLEMA 22. Hallar las asíntotas de $y = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$

PROBLEMA 23. Hallar las asíntotas de $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

PROBLEMA 24. Hallar las asíntotas de la hipérbola $y = ax + \dfrac{b}{x}$

PROBLEMA 25. Hallar las asíntotas de $y = \dfrac{2x^2+3x+5}{x-1}$

RESPUESTAS

1. -4	**2.** $1/2$	**3.** $-1/3$
4. $1/2$	**5.** $2/\pi$	**6.** 0
7. π	**8.** $1/4$	**9.** 3 , 2
10. $\sqrt{3}/3$	**11.** $3/2$	**12.** $1/3$
13. $-\infty$	**14.** 0	**17.** $-\infty$
18. 1, $e^{-1/2}$	**19.** $-\infty$	**20.** $b=6$

21. Las asíntotas son $y = 2$ a la derecha, $y = -2$ a la izquierda.

22. Las asíntotas son $x = 2$, $x = -2$, $y = x$ a la derecha, $y = -x$ a la izquierda.

23. La asíntota es la recta $y = 0$, o sea el eje X.

24. Las asíntotas son $x = 0$, $y = a$.

25. Las asíntotas son $x = 1$, $y = 2x + 5$.

Capítulo 7

Continuidad

7.1 DEFINICION. Continuidad en un punto. Sea $f(x)$ una función definida en todos los puntos x de un intervalo abierto I que contiene al punto a. Decimos que $f(x)$ *es continua en el punto* a si se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

7.2 OBSERVACIONES.

1. Para que la función $f(x)$ sea continua en el punto a se requiere, explícitamente, que se cumplan las tres condiciones siguientes:

   i) $f(x)$ está definida en el punto a, es decir, existe el valor $f(a)$.

   ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, y

   iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

   O también en la notación de ε y δ : Que exista el valor $f(a)$ y que para todo $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. Así, $f(x)$ no será continua en el punto a si no se cumple al menos una de las tres condiciones (i), (ii), o (iii) señaladas en el parágrafo anterior, y en tal caso decimos que la *función* $f(x)$ *es discontinua en el punto* a.

7.3 DEFINICION. Continuidad en un intervalo abierto. Decimos que $f(x)$ es *continua en un intervalo abierto* I si $f(x)$ es continua en cada punto a del intervalo I.

7.4 EJEMPLO 1. Investigar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en cada punto x.

SOLUCION.

(1) Si $a \neq 0$, entonces $\quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} a}{a} = f(a)$

puesto que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando x se encuentra próximo al punto $a \neq 0$ y que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} a}{a}$ por las propiedades de límites.

Luego, $f(x)$ es continua en cada punto $a \neq 0$.

(2) Consideremos ahora el caso en que $a = 0$. Tenemos:

(i) $f(0) = 1$, por definición de la función $f(x)$ en $x = 0$.

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (resultado establecido en el capítulo de límites).

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = f(0)$, por definición de $f(x)$, cuando $x \neq 0$, y por (ii) e (i)

Luego $f(x)$ también es continua en el punto 0.

En conclusión: La función dada $f(x)$ es continua en todos los puntos a sin excepción.

EJEMPLO 2. Determinar si cada una de las siguientes funciones es continua en el punto $x = 2$.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(2) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(3) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(4) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(5) $p(x) = \dfrac{x - 2}{|x - 2|}$

SOLUCION.

(1) $f(x)$ no es continua en $x = 2$, pues el valor $f(2)$ no existe.

(2) $g(x)$ no es continua en $x = 2$, pues

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4 \neq 5 = g(2) .$$

(3) $h(x)$ es continua en $x = 2$, pues $\displaystyle\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 = h(2)$.

(4) $k(x)$ no es continua en $x = 2$, pues no existe $\displaystyle\lim_{x \to 2} k(x)$ ya que de

$$\lim_{x \to 2^+} k(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{|x - 2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} \qquad \text{(cuando } x > 2\text{)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} 1 = 1 \ .$$

y $$\lim_{x \to 2^-} k(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{|x - 2|} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{-(x - 2)} \qquad \text{(cuando } x < 2\text{)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} -1 = -1,$$

se sigue que $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} k(x) \neq \lim_{x \to 2^-} k(x)$, y por lo tanto, no existe $\displaystyle\lim_{x \to 2} k(x)$.

(5) $p(x)$ no es continua en $x = 2$, sea bien por que no existe $p(2)$, o sea bien porque no existe $\lim\limits_{x\to 2} p(x)$.

7.5 PROPIEDADES DE PRESERVACION DE LA CONTINUIDAD

TEOREMA. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el punto a. Entonces

(1) La función suma $f(x)+g(x)$ es continua en a.

(2) La función producto $f(x).g(x)$ es continua en a.

(3) La función cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua siempre que se cumpla que $g(a) \neq 0$.

(4) La función potencia enésima $f(x)^n$ es continua en el punto a.

(5) La función raíz enésima $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en el punto a.

Todas estas propiedades se siguen directamente de las propiedades correspondientes establecidas para los límites de funciones en el punto a.

FUNCIONES CONTINUAS IMPORTANTES. Son continuas:

1. **La función polinomial** $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, en todo punto x.

2. **La función racional** $\dfrac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}$, en todo punto x donde el denominador sea $\neq 0$.

3. **Las funciones trigonométricas**

   a) $\operatorname{sen} x$, en todo punto x

   b) $\cos x$, en todo punto x,

   c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, en todo punto x tal que $\cos x \neq 0$, o sea en todo punto $x \neq 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   d) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, en todo punto x tal que $\operatorname{sen} x \neq 0$, o sea en todo punto $x \neq 2k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7.6 TEOREMA. Composición de funciones continuas. Si $f(x)$ es una función continua en el punto a, y $g(x)$ es una función continua en el punto $f(a)$, entonces la función compuesta $h(x) = g[f(x)]$, es una función continua en el punto a.

EJEMPLOS.

1. La función $h(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 2x + 5)$ es continua en cada punto x, pues las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ son continuas, y

$$h(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 2x + 5) = g(x^2 - 2x + 5) = g(f(x))$$

2. La función $h(x) = \operatorname{sen}(\cos x^2)$ es continua en cada punto x, pues las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{sen} x$, son continuas y

$$h(x) = \operatorname{sen}(\cos x^2) = h(\cos x^2) = h\left[g(x^2)\right] = h\{g[f(x)]\}$$

7.7 CLASIFICACION DE LAS DISCONTINUIDADES

Hemos dicho que la función $f(x)$ es discontinua en el punto a si se cumple al menos una de las tres condiciones siguientes:

(1) $f(x)$ no está definida en a,

(2) no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Decimos que la función $f(x)$ tiene *discontinuidad evitable* o *removible* en el punto a si:

i) Existe el número real $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, y

ii) $f(a)$ no existe o, si $f(a)$ existe, se tiene $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

En tal caso se define

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

La nueva función $f^*(x)$ resulta ser continua en a y se llama *la extensión* o *prolongación continua de* $f(x)$ *al punto* a.

Decimos que $f(x)$ tiene *una discontinuidad de primera clase en el punto a* si existen los límites *finitos* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y no son iguales los tres valores $f(a)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

(Admitimos la posibilidad de que $f(a)$ no exista). En caso contrario decimos que $f(x)$ tiene una *discontinuidad de segunda clase en el punto a*.

De las definiciones, se sigue inmediatamente que toda discontinuidad removible es de primera clase.

EJEMPLO 1. Clasificar la discontinuidad de $f(x) = 2 - x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 0$. Si la discontinuidad es removible, definir la prolongación continua $f^*(x)$ de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

SOLUCION. No obstante que $f(x)$ no está definida en el punto $x = 0$, dicha función tiene una discontinuidad removible (y por lo tanto de primera clase) en el punto $x = 0$. En efecto, existe

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2 - x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 2 - \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 2 - 0 = 2,$$

ya que $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ se sigue directamente de $0 \le \left|x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$ y del teorema del Sandwich.

La prolongación continua $f^*(x)$ de $f(x)$ en $x = 0$ es dada por:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \ne 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \text{o} \quad f^*(x) = \begin{cases} 2 - x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2. La función $f(x) = \dfrac{(1+x)^6 - 1}{2x}$ no está definida en $x = 0$. Definir $f(0)$ de manera que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

SOLUCION. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^6 - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\left(1+6x+15x^2+30x^3+\ldots\right)-1}{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[3+\tfrac{15}{2}x+\tfrac{30}{2}x^2+\ldots\right] = 3,$$

podemos definir $f(0)=3$, y la función $f(x)$ es ahora continua en $x=0$.

EJEMPLO 3. Determinar la clase de discontinuidad de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ en el punto $x=1$.

SOLUCION. La función tiene discontinuidad de segunda clase en el punto $x=1$, pues

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

no son límites finitos.

EJEMPLO 4. Sea $f(x)=(-1)^{[\![1/x]\!]}$, donde $[\![\ ]\!]$ es la función mayor entero. Probar que no existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y concluir que $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda clase en el punto $x=0$.

SOLUCION. Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número real L tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=L$. Entonces, para $\varepsilon = 1/2$ existe un $\delta>0$ tal que

$$0<x<\delta \quad \text{implica} \quad |f(x)-L|<1/2 \qquad \textbf{(1)}$$

Elijamos un número par $2n$ tal que $\dfrac{1}{2n}<\delta$.

Luego se tiene $\dfrac{1}{2n}$ y $\dfrac{1}{2n+1}<\delta$ y $f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=(-1)^{[\![2n]\!]}=(-1)^{2n}=1$, pues $\dfrac{1}{1/2n}=2n$.

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = (-1)^{[\![2n+1]\!]} = (-1)^{2n+1} = -1 \qquad \text{pues} \qquad \frac{1}{\dfrac{1}{2n+1}} = 2n+1\ ,$$

y empleando (1)

$$\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-L\right|<\frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad |1-L|<\frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}<L<\frac{3}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2n+1}\right)-L\right|<\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad |-1-L|<\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{3}{2}<L<-\frac{1}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

De (2) y (3) resulta la contradicción $L>0$ y $L<0$.

Luego, no existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, y por lo tanto $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda clase en 0.

7.8 DEFINICION. Continuidad en un intervalo cerrado.

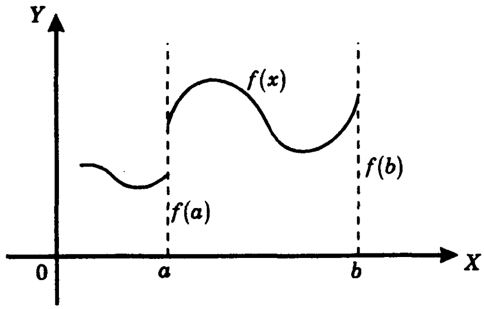
Decimos que la función $f(x)$ *es continua en un intervalo cerrado* $[a,b]$ si:

(1) $f(x)$ está definida en cada punto x del intervalo.

(2) $f(x)$ es *continua en todo punto del intervalo abierto* (a,b) es decir $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ para todo c de (a,b).

(3) $f(x)$ es *continua por la derecha en el extremo* a, es decir $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

(4) $f(x)$ es *continua por la izquierda en el extremo* b, es decir $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.



EJEMPLO 1. Redefinir la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|} & \text{si } \ 0\le x<1 \\ 4 & \text{si } \ x=1 \end{cases}$$

para obtener su prolongación continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

SOLUCION. Notemos que si $0 \le x \le 1$ entonces $\dfrac{x-1}{|x-1|} = -1$, luego

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

(1) $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(0, 1)$, pues si $0 < c < 1$ entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} -1 = -1 = f(c)$$

(2) $f(x)$ es continua por la derecha en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -1 = -1 = f(0)$$

(3) $f(x)$ no es continua por la izquierda en 1. En efecto,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -1 = -1 \ne 4 = f(1).$$

La prolongación continua $f^*(x)$ de $f(x)$ a todo el intervalo cerrado $[0, 1]$ es dada por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

o, en forma más simple $f^*(x) = -1$ para todo $0 \le x \le 1$.

EJEMPLO 2. Determinar la continuidad de la función $g(x) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{4-x^2}}$ en el intervalo $[-2, 2]$.

SOLUCION. Para $x = \pm 2$ la función no está definida y por lo tanto es discontinua en los extremos. Estas discontinuidades son de segunda clase pues no son *finitos* los límites

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}} = +\infty \,, \qquad \lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}} = +\infty$$

Por otra parte, si $-2 < c < 2$ entonces la función es continua en c pues $c^2 < 4$ y

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}} = \sqrt{\frac{9-c^2}{4-c^2}} = g(c)$$

Nota. Una función $f(x)$ es *continua en el intervalo semiabierto por la derecha* $[a, b)$ si es continua en todo punto x del intervalo abierto (a, b) y además es continua por la derecha en el punto a.
De manera similar se define la continuidad en un intervalo semiabierto por la izquierda $(a, b]$, y también, en intervalos de la forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ y en toda recta $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

EJEMPLO 3. Determinar los intervalos en los cuales cada una de las siguientes funciones es continua

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ **(2)** $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

SOLUCION.

(1) La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ no está definida en $x = \pm 3$ y por consiguiente es discontinua en estos puntos.

Por otra parte, si $c \neq \pm 3$ entonces $c^2 \neq 9$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{c^2 - 9} = f(c)$, y por lo tanto $f(x)$ es continua en todo punto $c \neq \pm 3$. *Concluimos* pues que $f(x)$ es continua en los intervalos $(-\infty, 3)$, $(-3, 3)$, $(3, +\infty)$.

(2) Tenemos que $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ o $(x-1)^2 \geq 9$, que es equivalente a $x - 1 \geq 3$ o $x - 1 \leq -3$, o también a $x \geq 4$ o $x \leq -2$.

Luego $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ está definida solamente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[4, +\infty)$.

Puesto que $x^2 - 2x - 8 > 0$ si x es un punto de $(-\infty, -2)$ o de $(4, +\infty)$ tenemos $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} \sqrt{x^2 - 2x - 8} = \sqrt{c^2 - 2c - 8} = g(c)$, si c se encuentra en los intervalos abiertos, y se ve directamente que

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = 0 = g(-2), \qquad \lim_{x \to 4^+} g(x) = 0 = g(4).$$

Concluimos pues que $g(x)$ es continua en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[4, +\infty)$.

7.9 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

TEOREMA. Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) *$f(x)$ es acotada sobre $[a,b]$.* Es decir, existe un número $C>0$ tal que $|f(x)|\le C$ para todos los puntos del intervalo $[a,b]$.

(2) *$f(x)$ tiene un valor mínimo y un valor máximo en $[a,b]$.* Es decir, existen puntos x_0 y x_1 en $[a,b]$ tales que $f(x_0)\le f(x)\le f(x_1)$, para todos los puntos x del intervalo $[a,b]$.

Designamos con $m=f(x_0)=$ *el valor mínimo de* $f(x)$ en $[a,b]$

y $M=f(x_1)=$ *el valor máximo de* $f(x)$ en $[a,b]$

(3) *Teorema del valor intermedio:* $f(x)$ toma todos los valores intermedios entre m y M, es decir que

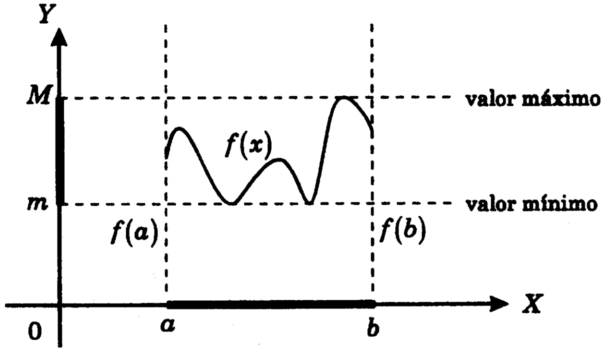
i) $m\le f(x)\le M$, para todo x de $[a,b]$, y

ii) dado un número y cualquiera tal que $m\le y\le M$, entonces existe al menos un x de $[a,b]$ tal que $y=f(x)$

Nota. En particular, para todo número y comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un x de $[a,b]$ tal que $y=f(x)$.

(4) *Teorema del cero:* Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número x en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x)=0$.

Nota. Cualquier x tal que $f(x)=0$ se llama un *cero de la función* o una raíz de la ecuación $f(x)=0$.



Gráfica de una funcion continua sobre un intervalo cerrado.

Si $f(x)$ es una función continua sobre el intervalo *cerrado* $[a,b]$ entonces adquiere valores máximo y mínimo, M y m, *respectivamente, y los valores* $f(x)$ *llenan* el intervalo cerrado $[m,M]$.

7.10 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Probar que si $f(x)$, $g(x)$ son funciones continuas en el punto a, entonces las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x).g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, cuando $g(a)\neq 0$, son continuas en a.

SOLUCION.

(1) Tenemos $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$

Luego $f(x)+g(x)$ es continua en a.

(2) Tenemos $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (producto de límites)

$= f(a).g(a)$ (continuidad de $f(x)$ y $g(x)$ en a)

Luego $f(x).g(x)$ es continua en a.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (cociente de límites, si $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$)

$= \dfrac{f(a)}{g(a)}$ (continuidad de $f(x)$ y $g(x)$ en a)

Luego $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en a.

PROBLEMA 2. Probar que si $f(x)$ es continua en el punto a, entonces las funciones $f(x)^n$ y $\sqrt[n]{f(x)}$ son continuas en a.

SOLUCION.

(1) Tenemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = f(a)^n$. Luego $f(x)^n$ es continua en a.

(2) Tenemos $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{f(a)}$. Luego $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en a.

Nota. Como ya se ha dicho en el capítulo de límites asumimos que $\sqrt[n]{f(a)}$ está definido. Es decir que si n es impar, $f(a)$ puede ser cualquier número; y que si n es par, entonces se supone que $f(x) \geq 0$ y por lo tanto $f(a) \geq 0$.

PROBLEMA 3. Probar que $P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ es una función continua en cada punto a.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m\right) = b_0 + b_1 a + \ldots + b_m a^m$, lo cual ha sido establecido en el problema 22, Sección 6.3 del capítulo de límites.
Sin embargo, procederemos a dar una demostración directa de este resultado haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas.

Paso 1. Toda función constante $f(x) = c$ es continua en a.

En efecto $\quad \lim\limits_{x \to a} c = c = f(a)$.

Paso 2. *La función identidad* $g(x) = x$ es continua en a.

En efecto, se cumple $\lim\limits_{x \to a} x = a = g(a)$, ya que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|g(x) - g(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Paso 3. $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ es continua en a. En efecto, las funciones b_0, $b_1 x$, ... , $b_m x^m$ son continuas en a por ser productos de funciones constantes y $g(x) = x$.

Luego, $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ es una función continua, por ser suma de funciones continuas.

PROBLEMA 4. Probar que la función racional $R(x) = \dfrac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}$ es continua en todos los puntos en los que el denominador no se anule.

SOLUCION. Las funciones polinomiales

$$P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \quad \text{y} \quad Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

son continuas en todo punto a , por el problema 3.

Luego, la función cociente $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo punto a tal que $Q(a) \neq 0$, por el problema 1.

PROBLEMA 5. Probar que si $f(x)$ es continua en a entonces $|f(x)|$ es una función continua en a.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| \quad \text{(por el problema 25, Sección 6.3)}$$

$$= |f(a)| \quad \text{(continuidad de } f(x) \text{ en } a)$$

Luego, $|f(x)|$ es continua en a.

PROBLEMA 6. Hallar los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones:

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{si } x\neq -2 \\ 3 & \text{si } x=-2 \end{cases}$ **(2)** $g(x)=\begin{cases} |3x+7| & \text{si } x\neq -\frac{7}{3} \\ 2 & \text{si } x=-\frac{7}{3} \end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 4-3x & \text{si } 1<x<2 \\ x-4 & \text{si } 2\leq x \end{cases}$

SOLUCION.

(1) Puesto que la función racional $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$ es continua en todo punto x tal que $x+2\neq 0$, tenemos que $f(x)$ es continua en cada $x\neq -2$.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x+3) = -2+3 = 1.$$

Y como $f(-2)=3$, tenemos $\lim\limits_{x\to -2} f(x)\neq f(-2)$. Concluimos que -2 es el único punto de discontinuidad de $f(x)$.

(2) La función $|3x+7|$ es continua en todo punto por ser el valor absoluto de la función continua $3x+7$. Luego, $g(x)$ es continua en todo punto $x\neq -\frac{7}{3}$.

Por otra parte, $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{7}{3}} g(x) = \lim_{x\to -\frac{7}{3}} |3x+7| = \left|3\left(-\tfrac{7}{3}\right)+7\right| = 0$

y como $g\left(-\frac{7}{3}\right)=2$, tenemos que $\lim\limits_{x\to-\frac{7}{3}} g(x) \neq g\left(-\frac{7}{3}\right)$. Por lo tanto, $g(x)$ es discontinua en el punto $-7/3$.

(3) La función $h(x)$ es continua en todo punto $x \neq 1, 2,$ por ser igual a funciones polinomiales, las que, según sabemos, son continuas en todo punto.

Continuidad en el punto $x = 1$.

Calculamos los límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x+3) = 2(1)+3 = 5,$$

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (4-3x) = 4-3(1) = 2,$$

y $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$. Luego, $h(x)$ es discontinua en el punto $x = 1$ ya que no existe $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

Continuidad en el punto $x = 2$.

Calculamos los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} (4-3x) = 4-3(2) = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-4) = 2-4 = -2\,.$$

Luego, existe $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = -2$ y como $h(2) = 2-4 = -2$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = h(2)$,

y por lo tanto $h(x)$ es continua en el punto $x = 2$.

En resumen, el único punto de discontinuidad de $h(x)$ es $x = 1$.

RESPUESTA.

(1) $x = -2$ para la función $f(x)$.

(2) $x = -7/3$ para la función $g(x)$.

(3) $x = 1$ para la función $h(x)$.

PROBLEMA 7. Hallar todos los puntos de discontinuidad de la función mayor entero $[\![x]\!]$ (o *función parte entera de* x).

SOLUCION. Por definición se tiene $[\![x]\!] = n$ si $n \le x < n+1$, n es un número entero.

Sea a tal que $n \le a < n+1$.

Caso 1. Si $n < a < n+1$ entonces

$[\![x]\!] = n =$ función constante de n en el intervalo abierto $(n, n+1)$.

Y como toda función constante es continua en cada punto, concluimos que $[\![x]\!]$ es continua en cada punto a tal que $n < a < n+1$.

Caso 2. $a = n$.

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to n^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to n^-} (n-1) = n-1 \qquad \text{(pues si } n-1 \le x < n\text{, entonces } [\![x]\!] = n-1)$$

$$\lim_{x\to n^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to n^+} n = n \qquad \text{(pues si } n < x < n+1\text{, entonces } [\![x]\!] = n)\,.$$

Como $\lim\limits_{x\to n^-} [\![x]\!] \ne \lim\limits_{x\to n^+} [\![x]\!]$, no existe $\lim\limits_{x\to n} [\![x]\!]$, y la función $[\![x]\!]$ es discontinua en $a = n$.

Luego $[\![x]\!]$ es discontinua en cada entero n.

PROBLEMA 8. Definir cada una siguientes funciones en el punto indicado de manera que resulte ser continua en dicho punto.

(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2}{x-8}$, en $a = 8$ (2) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$, en $a = 0$

SOLUCION. Basta calcular los límites de las funciones dadas cuando $x = a$ y definir las funciones en el punto a con valor igual a tales límites.

(1) Tenemos

$$\lim_{x\to 8} f(x) = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{\left(2+\sqrt[3]{x}\right) - 2^2}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2\right)} = \frac{1}{(4+4+4)(2+2)} = \frac{1}{48}\,.$$

Y así definimos $f(8) = 1/48$

para que $f(x)$ sea continua en $x = 8$.

(2) Tenemos

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)-1^3}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)}+1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

Y así definimos $f(0) = 1/3$,

para que la función $g(x)$ sea continua en $x = 0$.

PROBLEMA 9. Hallar los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} |x - [\![x]\!]| & \text{si } [\![x]\!] \text{ es par} \\ |x - [\![x+1]\!]| & \text{si } [\![x]\!] \text{ es impar.} \end{cases}$$

SOLUCION. En primer lugar, vamos a obtener una expresión más simple de la función $f(x)$.

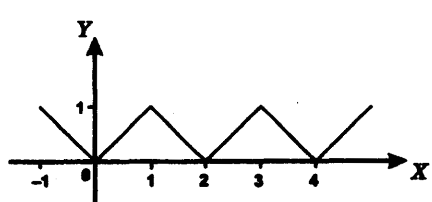
Caso 1. $[\![x]\!] = \text{par} = 2n$.

Entonces $2n \le x < 2n+1$ y $f(x) = |x - [\![x]\!]| = |x - 2n| = x - 2n$.

Caso 2. $[\![x]\!] = \text{impar} = 2n-1$.

Entonces $2n-1 \le x < 2n$, $2n \le x+1 < 2n+1$ y,

$$f(x) = |x - [\![x+1]\!]| = |x - 2n| = 2n - x \quad \text{pues } x < 2n.$$



Gráfica de $f(x)$

En resumen $f(x) = x - 2n$ si $2n \le x < 2n+1$, y

$f(x) = 2n - x$ si $2n - 1 \le x < 2n$, de donde concluimos que $f(x)$ es continua en cada punto de los intervalos abiertos $(2n, 2n+1)$ y $(2n-1, 2n)$ para todo entero n.

Continuidad en un número par $2n$.

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 2n^-} f(x) = \lim_{x \to 2n^-} (2n - x) \qquad \text{(pues } 2n - 1 < x < 2n \text{, cuando } x \to 2n^-\text{)}$$

$$= 2n - 2n = 0$$

$$\lim_{x \to 2n^+} f(x) = \lim_{x \to 2n^+} (x - 2n) \qquad \text{(pues } 2n < x < 2n + 1 \text{, cuando } x \to 2n^+\text{)}$$

$$= 2n - 2n = 0.$$

Luego $\lim\limits_{x \to 2n} f(x) = 0 = f(2n)$, lo que *prueba que* $f(x)$ *es continua en* $2n$.

Continuidad en un número impar $2n - 1$.

Tenemos $\lim\limits_{x \to (2n-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (2n-1)^-} [x - (2n-2)]$

(pues $2n - 2 < x < 2n - 1$, cuando $x \to (2n-1)^+$)

$$= 2n - (2n - 1) = 1.$$

Luego $\lim\limits_{x \to 2n-1} f(x) = 1 = f(2n-1)$, y por lo tanto $f(x)$ *es continua en el punto* $2n - 1$.

PROBLEMA 10. Hallar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son continuas

(1) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 6}$ **(2)** $g(x) = 1 - x + [\![x]\!] - [\![1 - x]\!]$

SOLUCION.

(1) Puesto que $f(x)$ es una función racional, sabemos que es una función continua en todos los puntos x tales que $x^2 - 7x + 6 \neq 0$.

De $x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1) = 0$ vemos que $x = 1, 6,$ son los únicos puntos que anulan el denominador de $f(x)$. Luego la función $f(x)$ es continua en los intervalos abiertos $(-\infty, 1), (1, 6)$ y $(6, +\infty)$.

(2) Simplificamos la expresión dada de $g(x)$.

Si $[\![x]\!] = n$, entonces $n \leq x < n+1$, $-n-1 < -x \leq -n$ y $-n < 1-x \leq 1-n$.

Luego $$[\![1-x]\!] = \begin{cases} -n & \text{si } -n < 1-x < 1-n \quad \text{o} \quad n < x < n+1 \\ 1-n & \text{si } 1-x = 1-n \quad \text{o} \quad x = n\,. \end{cases}$$

Y por lo tanto, si $n < x < n+1$ tenemos

$$f(x) = 1-x+[\![x]\!]-[\![1-x]\!] = 1-x+n-(-n) = 1-x+2n;$$

y si $x = n$, tenemos

$$f(x) = 1-x+[\![x]\!]-[\![1-x]\!] = 1-n+n-(1-n) = n.$$

En resumen, $f(x) = 1-x+2n$ si $n < x < n+1$ y $f(x) = n$ si $x = n$.

Se sigue pues que $f(x)$ es continua en cada intervalo abierto $(n, n+1)$.

Continuidad en el punto n. Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} (1-x+2(n-1)) \qquad \text{(pues } n-1 < x < n \text{ cuando } x \to n^-)$$
$$= 1-n+2(n-1) = n-1,$$

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} (1-x+2n) \qquad \text{(pues } n < x < n+1 \text{ cuando } x \to n^+)$$
$$= 1-n+2n = 1+n,$$

y puesto que $f(n) = n \neq \lim\limits_{x \to n^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$, concluimos que $f(x)$ es *continua solamente en cada intervalo abierto* $(n, n+1)$.

PROBLEMA 11. Determinar si la función

$$f(x) = 2x-1 \quad \text{si } x \leq 2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^2 - 3 \quad \text{si } x > 2$$

es continua en los siguientes intervalos:

(1) $(-\infty, 2]$ (2) $(0, 4)$ (3) $[2, 5)$ (4) $(2, 5)$

SOLUCION.

(1) Sí, porque $f(x)=2x-1$ es una función continua en toda la recta.

(2) $f(x)$ es continua en cada punto a tal que $0<a<2$ o $2<a<4$, pero

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-1) = 2(2)-1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-3\right) = (2)^2-3 = 1$$

de donde se sigue que no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, y por lo tanto, que $f(x)$ no es continua en $x=2$.

Luego, la función no es continua en el intervalo abierto $(0,4)$.

(3) Puesto que $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-3\right) = 1 ,$$

y $$f(2)=2(2)-1=3 ,$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, y por lo tanto $f(x)$ no es continua en el intervalo $[2,5)$.

(4) Puesto que $f(x)=x^2-3$ para $x>2$, concluimos que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $[2,5)$.

PROBLEMA 12. Hallar los valores de A y B para que sea continua la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2A & x<-2 \\ 3Ax+B & -2\le x\le 1 \\ 3x-2B & 1<x \end{cases}$$

SOLUCION.

La función $f(x)$ es evidentemente continua en todos los puntos $x\neq -2, 1$.

Así, solamente debemos exigir la condición de continuidad en los puntos $x=-2, 1$.

Para la continuidad de $f(x)$ en $x=-2$ tenemos

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -2^-} (x+2A) = \lim_{x\to -2^+} (3Ax+B) = -6A+B ,$$

$$-2+2A=-6A+B \ , \quad \text{que da la ecuación} \quad 8A-B=2 \tag{1}$$

Similarmente, para la continuidad de $f(x)$ en $x=1$ tenemos

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 1^-}(3Ax+B) = \lim_{x\to 1^+}(3x-2B) = 3A+B \ ,$$

$$3A+B=3-2B \ , \quad \text{que da la ecuación} \quad A+B=1 \tag{2}$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos $A=1/3$ y $B=2/3$.

PROBLEMA 13. Probar que la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \end{cases}$$

no es continua en ningún punto.

SOLUCION. Suponemos conocido el hecho de que entre dos números cualesquiera siempre existen números racionales e irracionales. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que exista un punto a tal que $f(x)$ es continua en a, o sea que se cumple que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Entonces para $\varepsilon=1/2$ existe un $\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-f(a)|<1/2$.

Elijamos un número racional r y un número irracional i tales que

$$a<r<a+\delta \quad \text{y} \quad a<i<a+\delta .$$

Luego
$$|f(r)-f(a)|=|1-f(a)|<1/2 \tag{1}$$
y
$$|f(i)-f(a)|=|0-f(a)|<1/2 \tag{2}$$

Entonces (1) es equivalente a $1-1/2<f(a)<1+1/2$ o $1/2<f(a)<3/2$

y (2) es equivalente a $-1/2<f(a)<1/2$. Así obtenemos la contradicción $1/2<f(a)$ y $f(a)<1/2$.

Luego $f(x)$ no es continua en ningún punto.

PROBLEMA 14. Dar ejemplos de dos funciones discontinuas tales que la suma y el producto de las mismas sean funciones continuas.

SOLUCION. Sea $f(x)$ la función discontinua dada en el problema 13.

Tomemos $g(x)=1-f(x)$. Entonces $g(x)$ también es discontinua, ya que si fuese continua, la función $1-g(x)=1-[1-f(x)]=f(x)$ sería continua.

Por otra parte, tenemos que

$$f(x)+g(x) = f(x)+[1-f(x)] = 1 = \text{función constante},$$

que es una función continua, y

$$f(x).g(x) = f(x).(1-f(x)) = 0 = \text{función constante},$$

pues si x es un número racional entonces $f(x)=1$ y $1-f(x)=0$,

y por lo tanto $f(x).g(x)=0$; y si x es un número irracional, entonces $f(x)=0$, y también obtenemos $f(x).g(x)=0$. Luego $f(x).g(x)$ es una función continua.

PROBLEMA 15. Probar que las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a$ y $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

Estos dos resultados fueron establecidos en el ejemplo 5 de la sección 6.3.

Luego $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son funciones continuas en todo punto a.

PROBLEMA 16. Composición de funciones continuas.

Probar que si $f(x)$ es continua en el punto a y $g(x)$ es continua en el punto $f(a)$, entonces la función $h(x)=g(f(x))$ es continua en el punto a.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$.

Sea $\varepsilon>0$

Paso 1. Por la continuidad de $g(y)$ en $f(a)$, existe un $\delta_1>0$ tal que

$$|y-f(a)|<\delta_1 \quad \text{implica} \quad |g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$$

Paso 2. Por la continuidad de $f(x)$ en a, para $\delta_1>0$ existe un $\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-f(a)|<\delta_1$.

Luego, si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<\delta_1$, por el paso 1, y a su vez $|f(x)-f(a)|<\delta_1$ implica $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$ por el paso 2.

Así hemos probado que $\qquad \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$,

y por lo tanto, que $g(f(x))$ es continua en el punto a.

PROBLEMA 17. Sean las funciones

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Hallar todos los puntos en los cuales la función compuesta $g(f(x))$ es continua.

SOLUCION.

La función $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ es continua en todos los puntos $x \neq 1$.

La función $g(y) = \sqrt{y}$ es continua en todos los puntos $y \geq 0$.

Luego, por el problema 16, la función compuesta $g(f(x))$ es continua en todos los puntos $x \neq 1$ tales que $f(x) \geq 0$. Estos puntos son los que satisfacen $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$, esto es, los pùntos del conjunto $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

PROBLEMA 18. Determinar la continuidad de

$$f(x) = \frac{[\![x^2]\!] - [\![x]\!]^2}{x^2 - 1}, \qquad \text{en el intervalo cerrado } [-1, 1].$$

SOLUCION. La función no está definida en los extremos -1, 1 . Vamos a obtener una expresión más simple de la función $f(x)$.

Si $-1 < x < 0$ entonces $[\![x]\!] = -1$, $0 < x^2 < 1$ y $[\![x^2]\!] = 0$,

luego $f(x) = \dfrac{0 - (-1)^2}{x^2 - 1} = -\dfrac{1}{x^2 - 1}$. Y si $0 \leq x < 1$, entonces $[\![x]\!] = 0$, $0 \leq x^2 < 1$ y $[\![x^2]\!] = 0$, luego $f(x) = 0$.

En resumen, $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 - 1}$ si $-1 < x < 0$; y $f(x) = 0$, de otra manera.

De tal expresión, concluimos que $f(x)$ es continua en todos los puntos de los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

Continuidad en 0. Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2-1} = 1$$

y
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Luego, no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y la función no es continua en el punto 0.

Continuidad en -1. Tenemos $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} -\dfrac{1}{x^2-1} = +\infty$.

Así, $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda clase en $x=-1$.

Continuidad en 1. Tenemos $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0$ y por lo tanto en el punto $x=1$, la función $f(x)$ tiene una discontinuidad removible.

PROBLEMA 19. Teorema del cero.

Probar que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(x)$ cambia de signo en los extremos, entonces existe un número x en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x)=0$.

SOLUCION.

$f(x)$ cambia de signo en los extremos si $f(a).f(b)<0$ o si $f(a)>0$ y $f(b)<0$, o $f(a)<0$ y $f(b)>0$.

En ambos casos, el número 0 se encuentra comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$ y por el teorema del valor intermedio, existe un número x en $[a,b]$ tal que $f(x)=0$. Puesto que $f(a)$ y $f(b)\neq 0$, el número x se encuentra en el intervalo abierto (a,b).

PROBLEMA 20. Probar que $x^3-3x+1=0$ tiene una raíz real en el intervalo $(1,2)$.

SOLUCION. Consideremos la función continua $f(x)=x^3-3x+1$ sobre el intervalo cerrado $[1,2]$.

Esta función cambia de signo en los extremos.

En efecto, $f(1)=(1)^3-3(1)+1=-1$

y $f(2)=(2)^3-3(2)+1=3$.

luego, por el teorema del cero, existe al menos un número tal que

$$1 < x < 2 \ \text{ y } \ f(x) = 0 \ , \quad \text{o sea} \quad x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Así la ecuación
$$x^3 - 3x + 1 = 0$$
tiene una raíz real en el intervalo abierto $(1, 2)$.

PROBLEMA 21. Probar que todo polinomio $p(x)$ de grado impar tiene una raíz real.

SOLUCION. Sea $p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$ donde $b_m > 0$ y m es un número impar.

Tenemos
$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty \qquad \textbf{(1)}$$
y
$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \qquad \textbf{(2)}$$

Estos resultados se siguen de
$$p(x) = \frac{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \dfrac{b_0}{x^m}}{\dfrac{1}{x^m}} ,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^m} \right) = b_m > 0 ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^m} = 0 \ , \ \text{ a través de valores positivos,}$$

y
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^m} = 0, \ \text{ a través de valores negativos, pues } m \text{ es impar.}$$

De (2) se sigue que existe un número $a < 0$ tal que $p(a) < 0$, y de (1), que existe un número $b > 0$ tal que $p(b) > 0$.

Luego $p(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y cambia de signo en los extremos y entonces, por el teorema del cero existe un número x en (a, b) tal que $p(x) = 0$.

PROBLEMA 22. Sea n un número entero. Probar que

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty \ , \qquad \lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

(2) Probar que existen infinitos números reales x tales que $\operatorname{tg} x = x$.

SOLUCION.

(1) Si $x > n\pi + \pi/2$ escribimos $x = n\pi + \pi/2 + h$, con $h > 0$.

$$y \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(n\pi + \pi/2 + h)}{\cos(n\pi + \pi/2 + h)} = \frac{(-1)^n \cos h}{-(-1)^n \operatorname{sen} h} = -\frac{\cos h}{\operatorname{sen} h},$$

donde hemos empleado

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2 + h) &= \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2) \cos h + \cos(n\pi + \pi/2) \operatorname{sen} h , \\ \cos(n\pi + \pi/2 + h) &= \cos(n\pi + \pi/2) \cos h - \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2) \operatorname{sen} h , \end{aligned}$$

con $\quad \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2) = (-1)^n \;$ y $\; \cos(n\pi + \pi/2) = 0$.

Luego $\quad \displaystyle\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = \lim_{h \to 0^+} \frac{-\cos h}{\operatorname{sen} h} = -\infty$,

pues $\quad \displaystyle\lim_{h \to 0^+} (-\cos h) = -1 \;$ y $\; \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \operatorname{sen} h = 0, \;\; \operatorname{sen} h > 0$,

a través de valores positivos de h.

En forma análoga, si $x < n\pi + \pi/2$ hacemos $x = n\pi + \pi/2 + h$ con $h < 0$.

Luego $\quad \displaystyle\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\cos h}{\operatorname{sen} h} = +\infty$,

pues $\quad \displaystyle\lim_{h \to 0^-} (-\cos h) = -1 \;$ y $\; \displaystyle\lim_{h \to 0^-} \operatorname{sen} h = 0 , \;\; \operatorname{sen} h < 0$

a través de valores negativos de h.

(2) Fijemos un número entero n. Probaremos que en el intervalo abierto $\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}, \; n\pi + \dfrac{3}{2}\pi\right)$ existe un número x tal que $\operatorname{tg} x = x$.

Por la parte (1) tenemos $\quad \displaystyle\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} [\operatorname{tg} x - x] = -\infty - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$

y $\quad \displaystyle\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{3}{2}\pi\right)^-} [\operatorname{tg} x - x] = +\infty - \left(n\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = +\infty$.

Luego, la función $\operatorname{tg} x - x$ cambia de signo en el intervalo $n\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < n\pi + \dfrac{3\pi}{2}$.

Y como es continua, por el teorema del cero existe un x en dicho intervalo tal que $\operatorname{tg} x - x = 0$.

Así, hemos probado que existe un número x en el intervalo $\left(n\pi + \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg} x = x$.

Finalmente, puesto que en cada intervalo $\left(n\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$,

hay números x tales que $\operatorname{tg} x = x$, concluimos que existen infinitos x con esta propiedad.

PROBLEMA 23. Sea $f(x)$ una función definida en todo número real y tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Si $f(x)$ es continua en el punto 0 probar que $f(x)$ es continua en todo a.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Haciendo el cambio de variable $x = a + h$, tenemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} f(a) + \lim_{h\to 0} f(h) = f(a) + f(0) = f(a).$$

Luego $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, y así $f(x)$ es continua en a.

PROBLEMA 24. Si $f(x)$ es una función tal que

(1) $f(x)$ es continua en cero y

(2) $f(x+y) = f(x).f(y)$, probar que $f(x)$ es continua en todo punto a.

SOLUCION. Haciendo $x = a + h$ tenemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} f(a).f(h) = f(a).f(0) = f(a+0) = f(a),$$

y así, $f(x)$ es continua en el punto a.

PROBLEMA 25. Probar que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el punto a, entonces la función $M(x) = \text{máximo}\{f(x), g(x)\}$ es continua en el punto a.

SOLUCION. Por definición $M(x) = f(x)$ si $f(x) \geq g(x)$ y,
$M(x) = g(x)$ si $f(x) \leq g(x)$.

Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} M(x) = M(a)$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

(1) Existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|x - a| < \delta_1$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ o
$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, (por la continuidad de $f(x)$ en a .)

(2) Existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|x - a| < \delta_2$ implica $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ o
$g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$, (por la continuidad de $g(x)$ en a .)

Tomemos $\delta = \text{minímo}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Luego, de las relaciones (1) y (2) se sigue que si $|x - a| < \delta$ entonces $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, $g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} M(a) - \varepsilon &= \text{máx}\{f(a), g(a)\} - \varepsilon \\ &< \text{máx}\{f(x), g(x)\} = M(x) \\ &< \text{máx}\{f(a), g(a)\} + \varepsilon = M(a) + \varepsilon \end{aligned}$$

Así, $|x - a| < \delta$ implica $|M(x) - M(a)| < \varepsilon$,

y por lo tanto hemos demostrado que $\lim\limits_{x \to a} M(x) = M(a)$. Luego $M(x)$ es continua en a .

Capítulo 8

Derivación y Funciones Elementales

8.1 DERIVADA DE UNA FUNCION. Sea $y = f(x)$ una función definida en cada punto del intervalo abierto I. Decimos que $f(x)$ es *diferenciable (o derivable) en un punto* x de I si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

En este caso, dicho límite se designa por $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\dfrac{df}{dx}(x)$ o $D_x f(x)$, y se llama *la derivada de* $f(x)$ *en el punto* x. Por definición se tiene entonces que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si la derivada $f'(x)$ existe para cada x de I, la función $f'(x)$ *se llama la derivada de la función* $f(x)$; y decimos que $f(x)$ *es diferenciable en todo el intervalo* I.

El valor de la derivada de y en el punto a se suele denotar con

$$\frac{dy}{dx}(a) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = f'(a) = y'(a) = \left[y'(x)\right]_{x=a}$$

8.2 REGLA PARA CALCULAR LA DERIVADA EN UN PUNTO.

De la definición $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, donde $\Delta x = h$, podemos extraer la siguiente regla para calcular la derivada de $f(x)$ en el punto x.

Paso 1. Se suma a la variable x un incremento $\Delta x \neq 0$, y se calcula el valor $f(x+\Delta x)$.

Paso 2. Se forma el incremento Δy de la función correspondiente al incremento Δx de la variable x, es decir, se calcula la diferencia $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Paso 3. Se divide ambos miembros entre el incremento de la variable x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Paso 4. Se calcula $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Por definición, el límite resultante es $f'(x)$, la derivada de $f(x)$ en x.

EJEMPLO. Hallar la derivada de $y = 3x^2 + x - 5$ en el punto x.

SOLUCION. Escribimos $f(x) = 3x^2 + x - 5$.

Paso 1. $f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 5 = 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 5$

Paso 2. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 5\right] - \left[3x^2 + x - 5\right]$

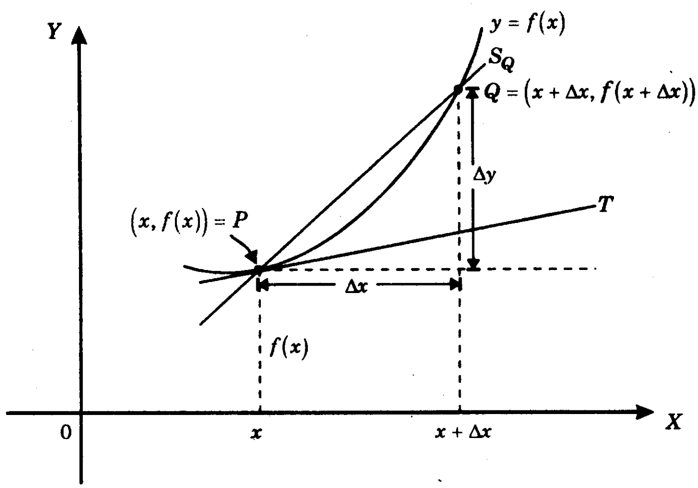
$= 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Paso 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x + 1$.

Paso 4. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 1$. Luego $\frac{dy}{dx} = 6x + 1$.

8.3 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA. Recta tangente a una curva.

La derivada $f'(x)$ puede ser interpretada como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. En efecto, consideremos un punto $P = (x, f(x))$ de la gráfica de $y = f(x)$.



Para un incremento Δx se obtiene el punto $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ de la gráfica de la curva, y la recta secante S que pasa por P y Q tiene pendiente

$$m_Q = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Fijemos el punto P y hagamos que Δx tienda hacia cero. Entonces el punto Q se aproxima al punto P y la recta secante S_Q gira al rededor del punto P. Si esta recta secante S_Q tiende a una posición límite T, entonces consideramos a la recta T como la recta tangente a la curva en el punto P.

Ahora bien, puesto que el punto P y la pendiente m_Q determinan completamente a la recta secante S_Q para que ésta se aproxime a una posición límite, y ya que P está fijo, bastará que exista

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_Q = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

y tomar este número como la pendiente de T.

Con esta discusión procedemos a dar las siguientes definiciones.

Dada la función $y = f(x)$, llamamos *recta tangente a la curva* $y = f(x)$ en x_1 (o a *la gráfica de* $f(x)$ *en el punto* $(x_1, f(x_1))$ a la recta T que cumple las dos condiciones siguientes:

T pasa por $(x_1, f(x_1))$,

y T tiene pendiente $f'(x_1)$.

Es decir, T es la recta cuya ecuación es $T: \dfrac{y-f(x_1)}{x-x_1} = f'(x_1)$.

Se llama *recta normal* a la curva $y=f(x)$ en x_1 (o *a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto* $(x_1, f(x_1))$ a la recta N que cumple las dos condiciones siguientes:

N pasa por $(x_1, f(x_1))$,

y N es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto $(x_1, f(x_1))$.

Es decir, N tiene pendiente $-\dfrac{1}{f'(x_1)}$ y su ecuación es

$$N: \frac{y-f(x_1)}{x-x_1} = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

EJEMPLO. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $y=2x^2-8x+5$ en el punto P, donde la pendiente de la normal es $-1/4$.

SOLUCION. Escribimos $f(x)=2x^2-8x+5$.

En primer lugar debemos calcular la derivada $f'(x)$.

Paso 1. $f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^2 - 8(x+\Delta x)+5$

$$= 2x^2+4x.\Delta x+2(\Delta x)^2-8x-8\Delta x+5.$$

Paso 2. $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = \left[2x^2+4x.\Delta x+2(\Delta x)^2-8x-8\Delta x+5\right] - \left[2x^2-8x+5\right]$

$$=4x.\Delta x+2(\Delta x)^2-8\Delta x$$

Paso 3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4x+2\Delta x-8.$

Paso 4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4x-8$. Luego $f'(x)=4x-8$.

Hallamos el punto $P=(x_1, f(x_1))$ en el cual la recta normal tiene pendiente $-1/4$:

$$-\frac{1}{f'(x_1)} = -1/4 \iff f'(x_1)=4 \iff 4x_1-8=4 \iff x_1=3 ,$$

y $$f(x_1)=f(3)=2(3)^2-8(3)+5=-1.$$

Luego, la recta tangente a la curva en $P = (3, -1)$ es

$$\frac{y-3}{x+1} = f'(3) = 4 \qquad \text{o} \qquad y = 4x + 7 \ ,$$

y la recta normal a la curva en $(3, -1)$ es

$$\frac{y-3}{x+1} = -\frac{1}{4} \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \ .$$

8.4 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones

1) $y = mx + b$ 2) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x}$ 3) $y = -\dfrac{4}{x^2}$

4) $y = (Ax + B)(Cx + D)$ 5) $y = x^n$.

SOLUCION.

1) Tenemos $y = mx + b$, $y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b$,

$$\Delta y = \left[m(x + \Delta x) + b\right] - \left[mx + b\right] = m\,\Delta x \ .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m$, ya que m es constante.

2) Se tiene $y = \dfrac{x^3 - 1}{x}$, $y + \Delta y = \dfrac{(x + \Delta x)^3 - 1}{x + \Delta x}$.

Luego
$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^3 - 1}{x + \Delta x} - \frac{x^3 - 1}{x}$$

$$= \frac{x\left[x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1\right] - (x + \Delta x)\left(x^3 - 1\right)}{x(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{2x^3.\Delta x + 3x^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + \Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

y
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 + 3x^2.\Delta x + x(\Delta x)^2 + 1}{x(x + \Delta x)} \ .$$

Tomando límites obtenemos $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

3) Tenemos $y = -\dfrac{4}{x^2}$, $y + \Delta y = -\dfrac{4}{(x+\Delta x)^2}$.

Luego $$\Delta y = \left[-\frac{4}{(x+\Delta x)^2}\right] - \left[-\frac{4}{x^2}\right] = -\frac{4\left[x^2-(x+\Delta x)^2\right]}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$= -\frac{4\left[x^2-x^2-2x.\Delta x-(\Delta x)^2\right]}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{4\left[2x.\Delta x+(\Delta x)^2\right]}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\,(2x+\Delta x)}{x^2\,(x+\Delta x)^2}\ .$$

Tomando límites resulta $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8x}{x^4} = \dfrac{8}{x^3}$.

4) Tenemos $y = (Ax+B)(Cx+D)$, $y + \Delta y = \left[A(x+\Delta x)+B\right]\left[C(x+\Delta x)+D\right]$.

Luego $\Delta y = 2ACx.\Delta x + AC(\Delta x)^2 + AD.\Delta x + BC.\Delta x$

y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2ACx + AC.\Delta x + AD + BC$.

Tomando límites se tiene $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2ACx + AD + BC$.

5) Tenemos $y = x^n$, $y + \Delta y = (x+\Delta x)^n$.

Luego

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = \left[x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n$$

$$= nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\ .$$

Tomando límites obtenemos $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$.

PROBLEMA 2. Hallar la derivada de $y = \sqrt{x}$.

SOLUCION. Tenemos $y = \sqrt{x}$, $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$.

Luego $$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(x+\Delta x) - x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} .$$

Por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

PROBLEMA 3. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Hallar $f'(0)$.

SOLUCION. Tenemos $x = 0$, $f(0) = 0$, $f(0 + \Delta x) = (\Delta x)^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$.

Luego $$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = (\Delta x)^3 . \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\Delta x)^2 . \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x} .$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$ obtenemos

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 . \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x} = 0 ,$$

Puesto que de $\left| \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x} \right| \leq 1$ se sigue que $\left| (\Delta x)^2 . \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x} \right| \leq (\Delta x)^2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

PROBLEMA 4. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{tg} x$.

SOLUCION. Tenemos $y = \operatorname{tg} x$, $y + \Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x)$.

Luego $$\Delta y = \operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \Delta x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x . \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} \Delta x} = \frac{\operatorname{tg} \Delta x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} \Delta x}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{tg}\,\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1+\text{tg}^2 x}{1-\text{tg}\,x\,.\text{tg}\,\Delta x}.$$

Ahora bien $$\lim_{\Delta x \to 0} \text{tg}\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,\Delta x}{\cos \Delta x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{tg}\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x}}{\cos \Delta x} = \frac{1}{1} = 1,$$

y por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{tg}\,\Delta x}{\Delta x} \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+\text{tg}^2 x}{1-\text{tg}\,x\,.\,\text{tg}\,\Delta x}$$

$$= 1+\text{tg}^2 x = \sec^2 x.$$

PROBLEMA 5. Hallar las rectas tangente y normal a la curva $y = \text{sen}\,x$ en el punto $(\pi,0)$.

SOLUCION. En primer lugar calculamos la derivada de $y = \text{sen}\,x$

$$\Delta y = (y+\Delta y) - y = \text{sen}\,(x+\Delta x) - \text{sen}\,x = \text{sen}\,x.\cos\Delta x + \text{sen}\,\Delta x\,.\cos\,\Delta x - \text{sen}\,x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\text{sen}\,x\,\frac{(1-\cos\Delta x)}{\Delta x} + \cos x\,.\,\frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x}.$$

Ahora bien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2}.\left[\frac{\text{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right]^2 = 0.1 = 0$$

y $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,\Delta x}{x} = 1.$$

Por lo tanto se tiene $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\text{sen}\,x\,.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} + \cos x\,.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= -\,(\text{sen}\,x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x\,.$$

Así $\dfrac{dy}{dx}(\text{sen}\,x) = \cos x$.

La recta tangente en el punto $(\pi, 0)$ es

$$\frac{y-0}{x-\pi} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)(\pi) = \cos\pi = -1 \quad \text{o} \quad y = -x + \pi ,$$

y la recta normal en el punto $(\pi, 0)$ es $\dfrac{y-0}{x-\pi} = 1$ o $y = x - \pi$.

PROBLEMA 6. Hallar las pendientes de las tangentes a las curvas $y = \dfrac{1}{x-1}$ e $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto en que se intersecan. ¿Cuál es el ángulo entre estas tangentes?

SOLUCION.

(1) Determinamos el punto de intersección.

Tenemos $\dfrac{1}{x-1} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$,

de donde $1 = (x-1)^3$ y $x = 2$,

y por lo tanto $y = \dfrac{1}{2-1} = 1$.

Luego (2, 1) es el punto en el que las dos curvas se intersecan.

(2) Calculamos la derivada de $y = \dfrac{1}{x-1}$:

$$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)-(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = -\frac{\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)} .$$

Por lo tanto $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(x-1)^2} .$$

(4) Calculamos la derivada de $y = x^2 - 2x + 1$.

Tenemos $y = x^2 - 2x + 1$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1$$

$$\Delta y = \left[(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)+1\right] - \left[x^2-2x+1\right] = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x \ ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 2 \ .$$

Tomando límites obtenemos $\dfrac{d}{dx}\left(x^2-2x+1\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 2$.

(5) Sea m_1 la pendiente de la tangente de $y = \dfrac{1}{x-1}$ en (2, 1).

Luego $$m_1 = \frac{dy}{dx}(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1 \ .$$

Sea m_2 la pendiente de la tangente de $y = x^2 - 2x + 2$ en (2, 1).

Luego $$m_2 = \frac{dy}{dx}(2) = 2(2) - 2 = 2 \ .$$

(6) Si θ designa el ángulo comprendido entre las tangentes obtenidas entonces se cumple

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \ ,$$

y por lo tanto $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-1-(2)}{1+(-1)(2)} = 3$.

PROBLEMA 7. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 + x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 4x$.

SOLUCION.

Escribimos $y = f(x) = x^3 + x$.

Buscamos los puntos x_1 tales que $f'(x_1) = 4 = \textit{pendiente de la recta } y = 4x$.

Debemos calcular $f'(x)$:

$$y = x^3 + x \ ,$$

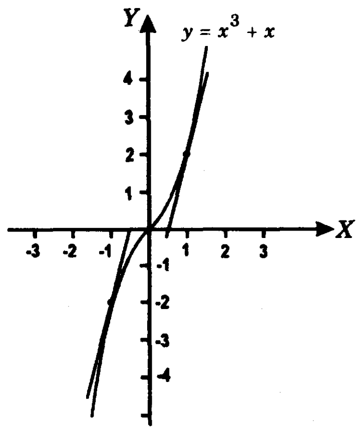
$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 + (x + \Delta x) \ ,$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - \left(x^3 + x\right) = 3x^2.\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + \Delta x \ ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 \ .$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 1 .$$



Si x_1 satisface la condición $f'(x) = 0$ entonces tenemos la ecuación

$$3x_1^2 + 1 = 4 ,$$

cuyas raíces son $x_1 = \pm 1$, y los valores de $f(x)$ correspondientes son

$$f(1) = (1)^3 + 1 = 2 , \qquad \text{para } x_1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2 , \text{ para } x_1 = -1 .$$

PROBLEMA 8. Si $f(x) = (x-a)g(x)$ donde $g(x)$ es una función continua en a, hallar $f'(a)$.

SOLUCION. Tenemos $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h-a)\, g(a+h) - 0}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} g(a+h) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a) .$$

PROBLEMA 9. Si $f(x)$ tiene derivada en el punto a, probar que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} .$$

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$= \frac{1}{2} \left[f'(a) + f'(a) \right] = f'(a) .$$

PROBLEMA 10. Sea $f(x)$ una función que cumple

a) $f(x+y)=f(x).f(y)$ para todo x, y, y

b) existe la derivada $f'(0)$ y $f(0)=1$.

Probar que existe $f'(x)$ para toda x y que se tiene $f'(x)=f'(0).f(x)$.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x).f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x)\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| .$$

$$= f(x).f'(0) .$$

PROBLEMA 11. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)|\le x^2$ para todo x.

Probar que $f(x)$ es diferenciable en 0 y que $f'(0)=0$.

SOLUCION. Haciendo $x=0$ en $|f(x)|\le x^2$ obtenemos $|f(0)|=0$ y por lo tanto $f(0)=0$.

Tenemos $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0$$

pues $$0 \le \left|\frac{f(h)}{h}\right| \le \left|\frac{h^2}{h}\right| = |h| \to 0 .$$

Así hemos probado que $f'(0)=0$.

PROBLEMA 12. Sea $f(x)$ una función diferenciable tal que $f(x)=f(-x)$ para todo x.

Probar que $f'(x)=-f'(-x)$.

SOLUCION. Tenemos $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h},$$ y

haciendo $k=-h$, $$f'(x) = -\lim_{k\to 0}\frac{f(-x+k)-f(-x)}{k} = -f'(-x) .$$

PROBLEMA 13. Sea $f(x)$ una función diferenciable tal que $f(x+a)=f(x)$ para todo x. Probar que $f'(x+a)=f'(x)$ para todo x.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x+a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+a+h)-f(x+a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

8.5 CONTINUIDAD Y DERIVACION.

TEOREMA. Si $f(x)$ tiene derivada en el punto a, entonces $f(x)$ es continua en tal punto. Es decir, que se cumple

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

PRUEBA. Tenemos $\quad f(x)-f(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)\,, \qquad$ si $x \neq a$, y

puesto que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ y $\displaystyle\lim_{x\to a}(x-a)=0$,

se concluye que $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0$, esto es $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

EJEMPLO. Demostrar mediante un ejemplo que si $f(x)$ es continua en un punto a, entonces no siempre $f(x)$ tiene derivada en ese punto.

SOLUCION. Basta considerar la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Consideramos el punto $a=0$, donde $f(0)=0$.

Paso 1. *la función propuesta es continua en* 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 = f(0),$$

y $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(0),$$

y por lo tanto, existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, y así $f(x)$ es continua en el punto 0.

Paso 2. *La función propuesta no tiene derivada en* 0.

En efecto, calculamos los límites laterales

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

y $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

y como estos límites laterales son distinos se sigue que no existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0) .$$

8.6 DERIVADAS POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA.

DEFINICION. Sea la función $f(x)$. Definimos

1) *La derivada por la derecha de* $f(x)$ *en el punto* a

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} ,$$

si tal límite lateral existe.

2) *La derivada por la izquierda de* $f(x)$ *en el punto* a

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

si tal límite lateral existe.

Nota. Es una consecuencia inmediata de la definición de límites laterales que *existe la derivada* $f'(a)$ *si y solamente si existen y son iguales las derivadas laterales* $f'_+(a)$ *y* $f'_-(a)$. Si se cumplen tales condiciones, entonces se verifica la igualdad

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a) ,$$

es decir que las tres derivadas son iguales.

EJEMPLO. Sea $f(x)=|\operatorname{sen} x|$. Calcular $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$.

SOLUCION. Tenemos $f(0)=|\operatorname{sen} 0|=0$.

Luego $$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Y también $$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= - \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = -1.$$

8.7 PROPIEDADES DE LA DERIVACION.

TEOREMA. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones que poseen derivadas en el punto x. Entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. **Derivada de la suma y diferencia de dos funciones.**

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \quad . \text{ y } \quad \frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

2. **Derivada del producto de una función por una constante.**

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}, \quad c \text{ es un número real,}$$

3. **Derivada del producto de dos funciones. Regla del producto.**

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} \quad ,$$

4. **Derivada del cociente de dos funciones.**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\dfrac{du}{dx} - u\cdot\dfrac{dv}{dx}}{v^2}, \quad \text{si } v(x)\neq 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}, v(x)\neq 0,$$

5. **Derivada de una potencia de función.**

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\dots,$$

6. Derivada de una raíz de una función.

$$\frac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

En forma más general se cumple

7. Derivada de u^r.

$$\frac{d}{dx}\left(u^r\right) = r u^{r-1}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad r \text{ es un número real.}$$

8.8 DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES BASICAS.

1. Derivada de una función constante $f(x) = c$.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \qquad c \text{ es un número real.}$$

Ejemplos a) $\frac{d}{dx}\left(3+\sqrt{2}\right) = 0$, b) $\frac{d}{dx}(2\pi) = 0$.

2. Derivada de x^n. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n x^{n-1}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Ejemplos

a) $\frac{dx}{dx} = 1$, b) $\frac{d}{dx}\left(x^7\right) = 7x^6$, c) $\frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-4}$.

3. Derivada de una función polinomial.

$$\frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n\right) = b_1 + 2b_2x + \ldots + nb_nx^{n-1}$$

Ejemplos

a) $\frac{d}{dx}\left(1-2x+4x^5\right) = -2+20x^4$, b) $\frac{d}{dx}\left(-x^6+4x^3+2x\right) = -6x^5+12x^2+2$.

4. Derivada de $\sqrt[n]{x}$.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\,x^{1/n-1} \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

En general se cumple

5. Derivada de x^r.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{r}\right) = r\,x^{r-1}\,, \qquad \text{donde } r \text{ es un número real .}$$

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,.x^{\sqrt{2}-1}$, b) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{3/4}\right) = \dfrac{3}{4}\,x^{3/4-1} = \dfrac{3}{4}x^{-1/4}$,

c) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2-2\right)^{3/2} = \dfrac{3}{2}\left(x^2-2\right)^{3/2-1}\dfrac{d}{dx}\left(x^2-2\right) = \dfrac{3}{2}\left(x^2-1\right)^{1/2}(2x) = 3x\left(x^2-1\right)^{1/2}$.

6. Derivadas de funciones trigonométricas.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable. Se cumple

I. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) = \cos v.\dfrac{dv}{dx}$,

II. $\dfrac{d}{dx}(\cos v) = -\operatorname{sen} v.\dfrac{dv}{dx}$,

III. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v.\dfrac{dv}{dx}$,

IV. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{ctg} v) = -\operatorname{cosec}^2 v.\dfrac{dv}{dx}$,

V. $\dfrac{d}{dx}(\sec v) = \sec v\,.\,\operatorname{tg} v.\dfrac{dv}{dx}$,

VI. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} v) = -\operatorname{cosec} v\,.\,\operatorname{ctg} v\,.\dfrac{dv}{dx}$.

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ pues $\dfrac{dx}{dx} = 1$,

b) $\dfrac{d}{dx}\cos\left(x^2 - 2x - 1\right) = -\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x - 1\right).\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 2x - 1\right)$

$= -\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x - 1\right)(2x - 2) = 2(1 - x)\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x - 1\right).$

7. Derivada de las funciones exponencial y logaritmo.

I. $\dfrac{d}{dx}\left(e^v\right) = e^v.\dfrac{dv}{dx}$, II. $\dfrac{d}{dx}(\ln v) = \dfrac{1}{v}.\dfrac{dv}{dx}$.

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$,

b) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}}.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\ln x^2\right) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$,

d) $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}.\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{ctg} x$.

8. Derivada de las funciones hiperbólicas.

La función *seno hiperbólico* se define por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ para cada número real x .

La función *coseno hiperbólico* se define por $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ para cada número real.

Se cumple

I. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} v) = \cosh v.\dfrac{dv}{dx}$, II. $\dfrac{d}{dx}(\cosh v) = \operatorname{senh} v.\dfrac{dv}{dx}$.

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}\left(1 + 3x^2\right) = \cosh\left(1 + 3x^2\right)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(1 + 3x^2\right) = 6x\cosh\left(1 + 3x^2\right).$

b) $\dfrac{d}{dx}\cosh\left(x^{5/4}\right) = \operatorname{senh}\left(x^{5/4}\right)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^{5/4}\right) = \dfrac{5}{4}x^{1/4}\operatorname{senh}\left(x^{5/4}\right).$

9. Derivada de las funciones trigonométricas inversas.

I. La función *arco seno* se define por $y = \operatorname{arc\,sen} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, y $-\dfrac{1}{2}\pi \le y \le \dfrac{1}{2}\pi$.

Se cumple $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}, \quad |v| < 1.$$

II. La función *arco coseno* se define por $y = \operatorname{arc\,cos} x$ si y sólo si $x = \cos y$, y $0 \le y \le \pi$.

Se cumple $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos} v) = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}, \quad |v| < 1.$$

III. La función *arco tangente* se define por $y = \operatorname{arc\,tg} x$ si y sólo si $x = \operatorname{tg} y$, y $-\dfrac{1}{2}\pi < y < \dfrac{1}{2}\pi$.

Se cumple $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} v) = \frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

IV. La función *arco cotangente* se define por $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ si y sólo si $x = \operatorname{ctg} y$, y $0 \le y < \pi$.

Se cumple $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,ctg} v) = -\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} 2x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot\dfrac{d(2x)}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos}\left(x^{3/2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^{3/2}\right)^2}}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right) = -\dfrac{3x^{1/2}}{2\sqrt{1-x^3}}$

c) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\left(e^x\right) = \dfrac{1}{1+\left(e^x\right)^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

d) $$\frac{d}{dx}\left(\text{arc ctg}\sqrt{2x+x^2}\right) = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{2x+x^2}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{1+2x+x^2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x+x^2}}$$

8.9 NOTA. Hemos dado una lista de derivadas de algunas funciones básicas en el análisis matemático con el propósito de poder hacer uso inmediato de ellas en el cálculo de derivadas. Gran parte de estas fórmulas serán demostradas en los problemas que siguen. Otras resultarán de la regla de derivación en cadena y, finalmente, las fórmulas correspondientes a las funciones exponencial, hiperbólicas y trigonométricas inversas, serán establecidas como una aplicación de los resultados de la derivación de funciones inversas.

8.10 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Derivada de una función constante.

Probar que si $u(x) = c$ es una función constante, entonces $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$.

SOLUCION.

Tenemos $u(x) = c$, $u(x+\Delta x) = c$, $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) = c - c = 0$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$,

y por lo tanto $$\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

PROBLEMA 2. Derivada de una suma de funciones.

Probar que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones diferenciales en el punto x, entonces se cumple

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

SOLUCION. Llamemos $w = w(x) = u(x) + v(x)$.

Tenemos $w(x+\Delta x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)$,

y $\Delta w = w(x+\Delta x) - w(x) = \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] + \left[v(x+\Delta x) - v(x)\right] = \Delta u + \Delta v$

Luego $\dfrac{\Delta w}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, y tomando límites cuando $\Delta x \to 0$

$$\frac{dw}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Por lo tanto $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$.

PROBLEMA 3. Derivada del producto de una función por una constante.

Si $u = u(x)$ tiene derivada en el punto x, y c es un número real, entonces $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(cu) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cu(x+\Delta x) - cu(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c\frac{du}{dx}.$$

PROBLEMA 4. Derivada de un producto de funciones. Regla del producto.

Probar que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones diferenciables en el punto x, entonces se cumple

$$\frac{d}{dx}(u, v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

SOLUCION. Llamemos $w = w(x) = u(x).v(x)$.

Se tiene $w(x+\Delta x) = u(x+\Delta x).v(x+\Delta x)$

y
$$\Delta w = w(x+\Delta x) - w(x) = u(x+\Delta x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x)$$
$$= [u(x+\Delta x) - u(x)].v(x+\Delta x) + u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)].$$

Luego $\Delta w = \Delta u.v(x+\Delta x) + u(x).\Delta v$

y $\dfrac{\Delta w}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Finalmente, haciendo uso de

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

obtenemos
$$\frac{dw}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} . \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) + u(x) . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \frac{du}{dx} . v(x) + u(x) . \frac{dv}{dx} ,$$

y por tanto
$$\frac{d}{dx}(u . v) = \frac{dw}{dx} = \frac{du}{dx} . v + u . \frac{dv}{dx} .$$

PROBLEMA 5. Derivada de una potencia.

Si $u = u(x)$ es una función diferenciable en el punto x, y $n = 1, 2, 3, \ldots$

Probar que
$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = n u^{n-1} . \frac{du}{dx} .$$

SOLUCION. Procedemos por inducción sobre n

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = \frac{d}{dx}\left(u^{n-1} . u\right) = \frac{d}{dx}\left(u^{n-1}\right) . u + \frac{du}{dx} . u^{n-1}$$

$$= (n-1) u^{n-2} \frac{du}{dx} . u + \frac{du}{dx} u^{n-1} = n u^{n-1} \frac{du}{dx} .$$

PROBLEMA 6. Probar que si $v = v(x)$ tiene derivada en el punto x y $v(x) \neq 0$, entonces se cumple $\dfrac{d(1/v)}{dx} = -\dfrac{1}{v^2} . \dfrac{dv}{dx}$.

SOLUCION. Tenemos
$$\Delta(1/v) = \frac{1}{v(x + \Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) . v(x)}$$

y
$$\frac{\Delta(1/v)}{\Delta x} = -\frac{1}{v(x + \Delta x) . v(x)} . \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} .$$

Haciendo uso de $\lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x)$, y como $v(x) \neq 0$, aplicando la propiedad de límite de cociente obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(1/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\frac{1}{v(x+\Delta x).v(x)}.\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= -\frac{1}{\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)\right].v(x)}.\lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{v(x)^2}.\frac{dv}{dx},$$

y por lo tanto $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{v}\right) = -\dfrac{1}{v^2}.\dfrac{dv}{dx}$.

PROBLEMA 7. Derivada de un cociente de funciones.

Probar que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ tienen derivadas en el punto x, y $v(x) \neq 0$, entonces se cumple

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

SOLUCION. Escribimos u/v como el producto de las funciones u y $1/v$.

Tenemos $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d}{dx}\left(u\frac{1}{v}\right) = \frac{d}{dx}(u).\frac{1}{v} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right).u$$

$$= \frac{du}{dx}.\frac{1}{v} + \left[-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}\right]u = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Por lo tanto $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$.

PROBLEMA 8. Derivada de una raíz.

Sea $u = u(x)$ una función diferenciable en el punto x. Para cualquier entero $n = 1, 2, 3, \ldots$, se cumple

$$\frac{d}{dx}\left(u^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\frac{du}{dx}.$$

SOLUCION. Sea $v = v(x) = u^{1/n}(x) = \sqrt[n]{u(x)}$.

Tenemos $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) = \sqrt[n]{u(x+\Delta x)} - \sqrt[n]{u(x)}$.

Empleando la identidad $a - b = \dfrac{a^n - b^n}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}}$

con $a = \sqrt[n]{u(x+\Delta x)}$ y $b = \sqrt[n]{u(x)}$, obtenemos

$$\Delta v = \sqrt[n]{u(x+\Delta x)} - \sqrt[n]{u(x)} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-2}.u(x)} + \ldots + \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

y
$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-2}.u(x)} + \ldots + \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (1)$$

Ahora bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{du}{dx}$ y puesto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$

tenemos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-1}} = \sqrt[n]{\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\right]^{n-1}} = \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-2}.u(x)} = \sqrt[n]{\left[\lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\right]^{n-2}.\,u(x)}$$
$$= \sqrt[n]{u(x)^{n-2}.\,u(x)} = \sqrt[n]{u(x)^{n-1}} ,$$

y así sucesivamente. Tomando límites en (1) cuando $\Delta x \to 0$ tenemos,

$$\frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}} \cdot \frac{du}{dx} ,$$

o sea
$$\frac{d}{dx}\left(u^{n}\right) = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{du}{dx} .$$

PROBLEMA 9. Derivada de una potencia con exponente fraccionario.

Sea $u = u(x)$ una función diferenciable en el punto x.

Si $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y $q = 1, 2, 3, \ldots$, probar que $\dfrac{d}{dx}\left(u^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q}\, u^{\frac{p}{q}-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

SOLUCION.

Caso 1: $p \geq 0$.

Tenemos $$\frac{d}{dx}\left(u^{p/q}\right) = \frac{d}{dx}\left[\left(u^{1/q}\right)^p\right] = p\left(u^{1/q}\right)^{p-1}\frac{d}{dx}\left(u^{1/q}\right)$$

$$= pu^{\frac{p-1}{q}} \cdot \frac{1}{q}u^{\frac{1}{q}-1}\frac{du}{dx} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1} \cdot \frac{du}{dx} .$$

Caso 2: $p < 0$. Escribimos $s = -p > 0$. Se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(u^{p/q}\right) = \frac{d}{dx}\left(u^{-s/q}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u^{s/q}}\right) = -\frac{1}{\left(u^{s/q}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(u^{s/q}\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(u^{s/q}\right)^2}\frac{s}{q}u^{\frac{s}{q}-1} \cdot \frac{du}{ds} = \quad \text{(Por el caso 1, pues } s > 0\text{)}$$

$$= \left(-\frac{s}{q}\right)u^{\frac{s}{q}-1-2\frac{s}{q}} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}\frac{du}{ds} .$$

PROBLEMA 10. Derivada de una función polinomial.

Probar que

1) $\dfrac{dx}{dx} = 1$ 2) $\dfrac{d}{dx}\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n\right) = b_1 + 2b_2x + \ldots + nb_nx^{n-1}$.

SOLUCION.

1) Tenemos $$\frac{dx}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 .$$

2) Tenemos $\dfrac{d(b_0)}{dx} = 0$,

y para $m \geq 1$, $$\frac{d}{dx}\left(b_mx^m\right) = b_m\frac{d}{dx}\left(x^m\right) = b_mmx^{m-1}.\frac{dx}{dx} = mb_mx^{m-1}.$$

Luego $\dfrac{d}{dx}\left(b_mx^m\right) = mb_mx^{m-1}$, para $m = 1, 2, \ldots , n$.

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n\right) = \frac{d}{dx}(b_0) + \frac{d}{dx}(b_1x) + \frac{d}{dx}\left(b_2x^2\right) + \ldots + \frac{d}{dx}\left(b_nx^n\right)$$

$$= b_1 + 2b_2x + \ldots + nb_nx^{n-1}$$

PROBLEMA 11. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = 3x^5 - 2x^2 + 4$ **2)** $u = ax^4 - 3bx^5$ **3)** $v = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^7}{7}$.

SOLUCION.

1) Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^5 - 2x^2 + 4\right) = 15x^4 - 4x$.

2) Tenemos $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(ax^4 - 3bx^5\right) = 4ax^3 - 15bx^4$.

3) $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^7}{7}\right) = -\frac{1}{2}2t + \frac{1}{7}7t^6 = -t + t^6$.

PROBLEMA 12. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = x^{4/3} + x - 1$ **2)** $y = \sqrt{b^2 - x^2}$

SOLUCION.

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3}\right) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(-1) = \frac{4}{3}x^{4/3-1}\frac{dx}{dx} + 1 + 0 = \frac{4}{3}x^{1/3} + 1$

2) Sea $u = b^2 - x^2$. Tenemos $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u^{1/2}\right) = \frac{1}{2}u^{1/2-1}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left[b^2 - x^2\right]^{1/2}\frac{d}{dx}\left(b^2 - x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} .$$

PROBLEMA 13. Derivar la función $y = \dfrac{a + bx + cx^2}{x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x} + b + cx\right) = a\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) + \frac{d}{dx}(b) + c\frac{dx}{dx}$$

$$= (-1)a\,x^{-1-1}\frac{dx}{dx} + 0 + c = -ax^{-2} + c = c - \frac{a}{x^2}$$

PROBLEMA 14. Diferenciar cada una de las siguientes funciones

1) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 2) $y = x\sqrt{2+3x}$ 3) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^4}$

SOLUCION.

1) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/3} + x^{-1/2}$.

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) + \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1/2}\right) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - \dfrac{1}{2}x^{-3/2}$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} .$$

2) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{2+3x}\right) = \frac{dx}{dx}\sqrt{2+3x} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+3x}\right).x$$

$$= \sqrt{2+3x} + x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+3x}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Pero $\sqrt{2+3x} = \sqrt{u} = u^{1/2}$, donde $u = 2 + 3x$, y por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+3x}\right) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(2+3x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(2+3x)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+3x}}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}} .$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2+3x} + x.\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} = \frac{2(2+3x)+3x}{2\sqrt{2+3x}} = \frac{9x+4}{2\sqrt{2+3x}}$$

3) $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = 2x^{-1} - 3x^{-4}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) - 3\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right) = -2x^{-2} + 12x^{-5} = -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^5} .$$

PROBLEMA 15. Calcular la derivada de las siguientes funciones

1) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2) $y = \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^3$

3) $y = x\sqrt{a^2 + x^2}$

4) $y = \frac{a-t}{a+t}$

SOLUCION.

1) Sea $u = a^2 - x^2$. Tenemos

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)' = \left(u^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}.u' = -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-3/2}\left(a^2 - x^2\right)'$$

$$= -\frac{1}{2\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}(-2x) = \frac{x}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} .$$

2) Sea $u = 1 + \frac{5}{x^2} = 1 + 5x^{-2}$. Tenemos

$$y' = \left(u^3\right)' = 3u^2u' = 3\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^2\left(1 + 5x^{-2}\right)'$$

$$= 3\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^2\left(-10x^{-3}\right) = -\frac{30}{x^3}\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^2 .$$

3) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{a^2+x^2}\right) = \frac{dx}{dx}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)x$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + x\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right)$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + \frac{x}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x) = \frac{\left(a^2+x^2\right)+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

4) Aplicando $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$ con $u = a - t$, $v = a + t$.

Tenemos

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(a+t)(a-t)' - (a-t)(a+t)'}{(a+t)^2}$$

$$= \frac{-(a+t)-(a-t)}{(a+t)^2} = -\frac{2a}{(a+t)^2}$$

PROBLEMA 16. Derivar la función $y = \dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(a^2-x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right) - \left(a^2+x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(a^2-x^2\right)(2x) - \left(a^2+x^2\right)(-2x)}{\left(a^2-x^2\right)^2} = \frac{4a^2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}.$$

PROBLEMA 17. Calcular la derivada de $y = 2\sqrt{px}$.

SOLUCION. Sea $u = px$. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2u^{1/2}\right) = 2.\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^{1/2}}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{px}}\frac{d}{dx}(px) = \frac{p}{\sqrt{px}}$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{\sqrt{px}}\sqrt{\dfrac{p}{x}}$.

PROBLEMA 18. Calcular la derivada de la función $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

SOLUCION. Haciendo $u = a^2 - x^2$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}\sqrt{u}\right) = \frac{1}{2}\frac{b}{a\sqrt{u}}\frac{du}{dx} = \frac{b}{2a\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{d}{dx}\left(a^2 - x^2\right) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

que también puede expresarse en la forma siguiente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

al sustituir $\sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{ay}{b}$.

PROBLEMA 19. Hallar la derivada de la función $y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$.

SOLUCION. Sea $u = a^{2/3} - x^{2/3}$ de manera que $y = u^{3/2}$.

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u^{3/2}\right) = \frac{3}{2}u^{1/2}\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}u^{1/2}\frac{d}{dx}\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right) = \frac{3}{2}y^{1/3}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

PROBLEMA 20. Derivar la función $y = \sqrt[3]{\dfrac{3 + 2x}{3 - 2x}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)^{1/3}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)^{-2/3} \frac{d}{dx}\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3-2x}{3+2x}\right)^{2/3} \frac{(3-2x)\frac{d}{dx}(3+2x) - (3+2x)\frac{d}{dx}(3-2x)}{(3-2x)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3-2x)^{2/3}}{(3+2x)^{2/3}} \cdot \frac{12}{(3-2x)^2} = \frac{4}{(3+2x)^{2/3}(3-2x)^{4/3}} .$$

PROBLEMA 21. Hallar la derivada de $y = (x+2)^2\sqrt{x^2+2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x+2)^2\sqrt{x^2+2}\right] = \frac{d}{dx}\left[(x+2)^2\right]\sqrt{x^2+2} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+2}\right).(x+2)^2$$

$$= 2(x+2)\sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(x+2)^2 = \frac{(x+2)\left[2\left(x^2+2\right)+x(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(3x^2+2x+4\right)}{\sqrt{x^2+2}} .$$

PROBLEMA 22. Calcular la derivada de $y = x^2\sqrt{3-4x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2\sqrt{3-4x}\right] = x^2\frac{d}{dx}\sqrt{3-4x} + \sqrt{3-4x}\,\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \frac{-2x^2}{\sqrt{3-4x}} + \sqrt{3-4x}.(2x) = \frac{-2x^2+2x(3-4x)}{\sqrt{3-4x}}$$

$$= \frac{6x-10x^2}{\sqrt{3-4x}} .$$

PROBLEMA 23. Hallar la derivada de $y = ax^m + bx^{m+n}$.

SOLUCION. $\dfrac{dy}{dx} = m\,a\,x^{m-1} + (m+n)\,b\,x^{m+n-1}$.

PROBLEMA 24. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-2}$ 2) $y = x^2\sqrt[3]{x^2}$ 3) $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

SOLUCION.

1) $\dfrac{dy}{dx} = 3\dfrac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) - 2\dfrac{d}{dx}\left(x^{5/2}\right) + \dfrac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)x^{-1/3} - 2\left(\dfrac{5}{2}\right)x^{3/2} - 2x^{-3}$

$$= 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 2x^{-3} .$$

2) Tenemos $y = x^2\sqrt[3]{x^2} = x^2\,x^{2/3} = x^{8/3}$.

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{8/3}\right) = \dfrac{8}{3}x^{5/3}$.

3) Tenemos $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}} = ax^{-2/3} - bx^{-4/3}$.

Luego $\dfrac{dy}{dx} = a\dfrac{d}{dx}\left(x^{-2/3}\right) - b\dfrac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right) = -\dfrac{2}{3}ax^{-5/3} - \dfrac{4}{3}bx^{-7/3}$.

PROBLEMA 25. Derivar la función $y = \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{2}{x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 3\left[-\frac{1}{(2x-1)^2}\frac{d}{dx}(2x-1)\right] - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-6}{(2x-1)^2} + \frac{2}{x^2} .$$

PROBLEMA 26. Hallar la derivada de $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Pero $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

Y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{2\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}{2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

PROBLEMA 27. Derivar la función $y = \left(1 + 2x - 3x^2\right)^{20}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + 2x - 3x^2\right)^{20} = 20\left(1 + 2x - 3x^2\right)^{19}\frac{d}{dx}\left(1 + 2x - 3x^2\right)$$

$$= 40(1 - 3x)\left(1 + 2x - 3x^2\right)^{19}.$$

PROBLEMA 28. Derivar la función $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right) = \frac{(c + dx)\frac{d}{dx}(a + bx) - (a + bx)\frac{d}{dx}(c + dx)}{(c + dx)^2}$$

$$= \frac{(c + dx)b - (a + bx)d}{(c + dx)^2} = \frac{bc - ad}{(c + dx)^2}.$$

PROBLEMA 29. Hallar la derivada de $y = \dfrac{-11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$y = \frac{-11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} = \frac{-11 - 8(x-2)}{2(x-2)^2} = \frac{-8x+5}{2(x-2)^2}$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{(x-2)^2\dfrac{d}{dx}(-8x+5) - (-8x+5)\dfrac{d}{dx}(x-2)^2}{(x-2)^4}$$

$$= -\frac{(x-2)\left[4(x-2)+(-8x+5)\right]}{(x-2)^4} = \frac{4x+3}{(x-2)^3}\ .$$

PROBLEMA 30. Calcular la derivada de $y = \left(\dfrac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)^m$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)^m = m\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)^{m-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)$$

Pero $$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right) = \frac{\left(ax^n-b\right)\dfrac{d}{dx}\left(ax^n+b\right) - \left(ax^n+b\right)\dfrac{d}{dx}\left(ax^n-b\right)}{\left(ax^n-b\right)^2}$$

$$= \frac{\left(ax^n-b\right)\left(nax^{n-1}\right) - \left(ax^n+b\right)\left(nax^{n-1}\right)}{\left(ax^n-b\right)^2} = -\frac{2abnx^{n-1}}{\left(ax^n-b\right)^2}.$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2abmnx^{n-1}\left(ax^n+b\right)^{m-1}}{\left(ax^n-b\right)^{m+1}}\ .$$

PROBLEMA 31. Hallar la derivada de cada una de la siguientes funciones

1) $y = \left|x^2 - 4\right|$ 2) $y = x|x|$ 3) $y = \sqrt[3]{|x| + x}$

SOLUCION. Hacemos uso de la identidad $|x| = \sqrt{x^2}$.

1) $y = \left|x^2 - 4\right| = \sqrt{\left(x^2 - 4\right)^2}$. Por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)^2 = \frac{2x\left(x^2-4\right)}{\left|x^2-4\right|}.$$

2) $y = x|x| = x\sqrt{x^2}$.

Tenemos $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}\,\frac{dx}{dx} = x\frac{x}{\sqrt{x^2}} + \sqrt{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{|x|} + |x| = |x| + |x| = 2|x|\ .$$

Nota. No podemos introducir x directamente bajo el signo radical pues x puede ser negativo.

3) Tenemos $y = \sqrt[3]{|x| + x} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2} + x}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2} + x\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2} + x\right)^{-2/3}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2} + x\right)$$

$$= \frac{1}{3\left(|x| + x\right)^{2/3}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\,.\,2x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3\left(|x| + x\right)^{2/3}}\cdot\frac{\left(x + |x|\right)}{|x|} = \frac{\left(|x| + x\right)^{1/3}}{3|x|}\ ,$$

o también $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{|x|}$.

PROBLEMA 32. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right) - \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) - \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

y simplificando el numerador

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

PROBLEMA 33. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \left[\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}\right)^2\right]' = 2\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}\right)'$$

$$= 2\left(|x+1| - |x|\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right)$$

y $\quad f'(x) = 2\left(|x+1| - |x|\right)\left(\dfrac{x+1}{|x+1|} - \dfrac{x}{|x|}\right)$.

PROBLEMA 34. Encontrar la derivada de $f(x) = (3x+2)^4\left(x^2-1\right)^{2/3}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = (3x+2)^4 \frac{d\left(x^2-1\right)^{2/3}}{dx} + \left(x^2-1\right)^{2/3} \frac{d(3x+2)^4}{dx}$$

$$= (3x+2)^4 \left[\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3} 2x\right] + \left(x^2-1\right)^{2/3}\left[4(3x+2)^3.3\right]$$

$$= \frac{4x(3x+2)^4}{3\left(x^2-1\right)^{1/3}} + 12(3x+2)^3\left(x^2-1\right)^{2/3} = \frac{4(3x+2)^3}{3\left(x^2-1\right)^{1/3}}\left[x(3x+2) + 9\left(x^2-1\right)\right]$$

$$= \frac{4(3x+2)^3\left(12x^2+2x-9\right)}{3\left(x^2-1\right)^{1/3}}.$$

PROBLEMA 35. Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones diferenciables en el punto s. Si r y s son dos números racionales, probar que

$$\frac{d\left(u^r.v^s\right)}{dx} = u^{r-1}.v^{s-1}\left(r.\frac{du}{dx}.v + su.\frac{dv}{dx}\right)$$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{d\left(u^r.v^s\right)}{dx} = \frac{d\left(u^r\right)}{dx}.v^s + u^r.\frac{d\left(v^s\right)}{dx}$$

$$= ru^{r-1}\frac{du}{dx}.v^s + su^r v^{s-1}.\frac{dv}{dx} = u^{r-1}v^{s-1}\left(r.\frac{du}{dx}.v + su\frac{dv}{dx}\right).$$

PROBLEMA 36. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{2}{\left(x^2-2x-4\right)^2}$ en el punto $(3, 2)$.

SOLUCION. La ecuación de la recta tangente tiene la forma $\dfrac{y-2}{x-3} = \dfrac{dy}{dx}(3)$.

Calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto 3.

Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\left(x^2-2x-4\right)^{-2} = -4\left(x^2-2x-4\right)^{-3}\frac{d}{dx}\left(x^2-2x-4\right)$$
$$= -4\left(x^2-2x-4\right)^{-3}(2x-2).$$

Luego $\dfrac{dy}{dx}(3) = 16$, y por lo tanto $\dfrac{y-2}{x-3} = 16$ o $y = 16x-46$.

PROBLEMA 37. Hallar la ecuación de una recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7x-6}}$ que sea perpendicular a la recta $48x-7y+1=0$.

SOLUCION. La pendiente de la recta $48x-7y+1=0$ es $m = 48/7$.

Luego, la recta tangente tiene pendiente $-7/48$. Buscamos los puntos x_1 tales que
$$\frac{dy}{dx}(x_1) = -\frac{7}{48} \tag{1}$$

Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x-6)^{-1/3} = -\frac{7}{3}(7x-6)^{-4/3} \tag{2}$$

De (1) y (2)
$$-\frac{7}{3}(7x_1-6)^{-4/3} = -\frac{7}{48},$$
$$16 = (7x_1-6)^{4/3}$$
$$2 = (7x_1-6)^{1/3}$$
$$8 = 7x_1-6,$$

obtenemos $x_1 = 2$, $y(x_1) = y(2) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7(2)-6}} = \dfrac{1}{2}$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es $\dfrac{y-1/2}{x-2} = -\dfrac{7}{48}$ o $y = \dfrac{1}{48}(-7x+38)$.

PROBLEMA 38. Encontrar la ecuación de la curva $y = x^2 + Ax + B$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1, 1)$.

SOLUCION. Puesto que el punto $(1, 1)$ se encuentra en la curva tenemos una primera ecuación

$$1 = (1)^2 + A(1) + B \qquad \text{o} \qquad A + B = 0 \tag{1}$$

Y como la recta $y = x$, con pendiente 1, es tangente a la curva dada en el punto $(1, 1)$ se debe cumplir que

$$\textit{pendiente de la recta} = \frac{dy}{dx} = 2x + A \text{ , en } x = 1 \text{ ,}$$

o sea $\quad 1 = 2(1) + A$, $\quad A = -1$

Luego, de (1) resulta $\quad B = 1$.

PROBLEMA 39. Hallar los puntos en los cuales las tangentes a la curva

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 1 \text{ ,} \quad \text{son paralelas a la recta } \; y = 2x + 5 \text{ .}$$

SOLUCION. Tenemos $\quad \dfrac{dy}{dx} = x^3 + 2x^2 - x$.

Buscamos los puntos x_1 tales que $\quad \dfrac{dy}{dx}(x_1) = \textit{pendiente de la recta } \; y = 2x + 5$

o sea $\; x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 = 2 \;$ y factorizando $\; (x_1 + 1)(x_1 - 1)(x_1 + 2) = 0$

Luego $x_1 = -1, 1, -2,$ que sustituidos en la ecuación de la curva dan las ordenadas

$$y_1 = 1/12 \text{ , para } x_1 = -1,$$
$$y_1 = 17/12 \text{ , para } x_1 = 1,$$
$$y_1 = -7/3 \text{ , para } x_1 = 2.$$

PROBLEMA 40. Hallar la ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt[5]{7 + x^2}$ en el punto (5, 2).

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(7+x^2\right)^{1/5} = \frac{1}{5}\left(7x+x^2\right)^{-4/5}\frac{d}{dx}\left(7+x^2\right) = \frac{2x}{5\left(7+x^2\right)^{4/5}} .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx}(5) = \dfrac{2(5)}{5(7+25)^{4/5}} = \dfrac{1}{8}$, y la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto (5, 2) es

$$\frac{y-2}{x-5} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}(5)} = -8 \qquad \text{o} \qquad y=-8x+42 .$$

PROBLEMA 41. Dada

$$y(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b de modo que $y'(1)$ exista

SOLUCION. Sean $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$.

Para que $y'(1)$ exista se requiere que se cumplan

(I) $f(1)=g(1)$ (ya que si $y(x)$ tiene derivada en $x=1$, entonces debe ser continua en ese punto).

(II) $\dfrac{df}{dx}(1) = \dfrac{dg}{dx}(1)$.

De (I) obtenemos $a(1)^2+b=1$ o $a+b=1$

Por otro lado $$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(ax^2+b\right) = 2ax ,$$

y como $g(x) = \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$ si $x>1$, tenemos que

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} ,$$

y por tanto en (II) $2a(1)=-1$ o $a=-1/2$, de donde $b=3/2$.

PROBLEMA 42. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en todo número real y tales que

(1) $g(x) = x f(x) + 1$,

(2) $g(x+y) = g(x).g(y)$

y (3) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Probar que $g'(x) = g(x)$.

SOLUCION. Tenemos

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x).g(\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \qquad \text{(Por la condición (2))}$$

$$= g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(\Delta x) - 1}{\Delta x} = g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\Delta x.f(\Delta x) + 1] - 1}{\Delta x} \qquad \text{(Por la condición (1))}$$

$$= g(x).\lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = g(x).1 \qquad \text{(Por la condición (3))}$$

$$= g(x) .$$

PROBLEMA 43. Hallar la derivada de $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} . \sqrt{(x+3)^3}}$.

SOLUCION. Tenemos $y = (x-1)^{1/2}(x+2)^{-2/3}(x+3)^{-3/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}(x+2)^{-2/3}(x+3)^{-3/2}$$

$$-\frac{2}{3}(x-1)^{1/2}(x+2)^{-5/3}(x+3)^{-3/2} - \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}(x+2)^{-2/3}(x+3)^{-5/2}$$

$$= (x-1)^{-1/2}(x+2)^{-5/3}(x+3)^{-5/2}\left[\frac{1}{2}(x+2)(x+3) - \frac{2}{3}(x-1)(x+3) - \frac{3}{2}(x-1)(x+2)\right]$$

$$= (x-1)^{-1/2}(x+2)^{-5/3}(x+3)^{-5/2}\left[\frac{-5x^2 - x + 24}{3}\right] = -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}} .$$

PROBLEMA 44. Hallar el punto de la curva $y^2 = 2x^3$ en el que la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$.

SOLUCION. Tenemos $y = \pm\sqrt{2x^3}$ y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{2}\left(2x^3\right)^{-1/2} . 6x^2 = \frac{3x^2}{\pm\sqrt{2x^3}} = \frac{3x^2}{y} .$$

Buscamos el punto (x_1, y_1) tal que

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1} = -\frac{1}{\textit{pendiente de la recta dada}} , \qquad \frac{3x_1^2}{y_1} = -\frac{1}{4/3} ,$$

o sea $\qquad y_1 = -4x_1^2. \qquad$ **(1)**

Además se cumple $\qquad y_1^2 = 2x_1^3 , \qquad$ **(2)**

pues (x_1, y_1) pertenece a la gráfica de la curva.

Resolviendo (1) y (2) obtenemos $x_1 = 0,\ 1/8$, y también

$y_1 = 0$ para $x_1 = 0$, y $y_1 = -\frac{1}{16}$ para $x_1 = \frac{1}{8}$.

De donde vemos que solamente el punto $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ cumple $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{4}$.

8.11 PROBLEMAS PROPUESTOS.

PROBLEMA 1. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{24(2x-1)^6} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

b) $y = 6\sqrt[3]{t + \sqrt{t}}$

c) $y = \sqrt{(x-1)\,x\,(x+1)}$

d) $y = \frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2bx - x^2}}$

PROBLEMA 2. Hallar $y(2)+(x-2)y'(2)$ de la función $y(x)=\sqrt{1+2x^2}$.

PROBLEMA 3. Probar que las hipérbolas $xy=4$, $x^2-y^2=5$ se intersecan en un ángulo recto.

PROBLEMA 4. Probar que si $(x-a)^2$ es un factor del polinomio $p(x)$, entonces $p'(a)=0$

PROBLEMA 5. Hallar los valores de A y B de modo que la función

$$y(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ Ax+B & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Sea derivable en el punto 2.

PROBLEMA 6. Hallar la derivada de la función y si $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$.

PROBLEMA 7. Derivando la ecuación $1+x+x^2+\ldots+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Hallar **a)** $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

b) $1^2+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}$

PROBLEMA 8. Probar que la ecuación de una recta tangente a la parábola $y^2=4px$ es de la forma $y=mx+\dfrac{p}{m}$.

PROBLEMA 9. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$, y son paralelas a la recta $16y-15x+3=0$.

PROBLEMA 10. Probar que la ecuación de la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en el punto (x_1,y_1) es $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.

PROBLEMA 11. Si $y(x+1)=\sqrt[3]{x^2+10x+24}$, hallar $y'(-1)$.

PROBLEMA 12. Sea $y(x)=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$, donde $[\![x]\!]=n$ si $n\le x<n+1$. Probar que:

a) $y'_+(2)=\infty$ **b)** $y'_-(2)=\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA 13. Sea $y(x) = \left|\sqrt[3]{x^2 - 2x}\right|$. Calcular $y'(x)$.

PROBLEMA 14. Hallar los ángulos que forman con el eje X, las normales a la curva $y = x - x^2$ en los puntos cuyas abscisas son $x = 0$, $x = 1$.

RESPUESTAS.

1. (a) $\dfrac{x^2 - 1}{(2x - 1)^8}$ (b) $\dfrac{1 + 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}\,.\sqrt[3]{\left(t + \sqrt{t}\right)^2}}$

(c) $\dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{(x-1)x(x+1)}}$ (d) $-x^5 . \sqrt[3]{\left(1 + x^3\right)^2}$ (e) $\dfrac{x - b}{\sqrt{\left(2bx - x^2\right)^3}}$

2. $\dfrac{4x + 1}{3}$ 5. $A = 4$, $B = -3$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

11. $\dfrac{1}{2}$ 13. $y' = \dfrac{2(x-1)}{3y\left(x^2 - 2x\right)^{1/3}}$ 14. 135°, 45°.

8.12 REGLA DE DERIVACION EN CADENA.

TEOREMA. Sean $y = y(x)$, $z = z(y)$ dos funciones tales que

1) $y(x)$ es diferenciable en el punto a, y

2) $z(y)$ es diferenciable en el punto $y(a)$.

Entonces la función compuesta $z = z(y(x))$ es diferenciable en el punto a y se cumple

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(y(a)) . \frac{dy}{dx}(a)$$

Esta fórmula suele expresarse también con las siguientes notaciones

$$z(y)'(x) = z'(y(x)).y'(x), \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} . \frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad D_x(z(y)) = D_y z \,.\, D_x y$$

Prueba de la regla de la cadena.

Debemos probar que se cumple

$$\lim_{h\to 0} \frac{z(y(a+h)) - z(y(a))}{h} = z'(y(a)) \,.\, y'(a).$$

Paso 1. Si $h \neq 0$ escribimos $p(h) = \dfrac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a)$.

Se cumple entonces

$$y(a+h) = y(a) + h \,.\, y'(a) + h \,.\, p(h)$$

y

$$\lim_{h\to 0} p(h) = 0 \;. \qquad \textbf{(1)}$$

En efecto, la primera ecuación resulta de dar común denominador h y despejar $y(a+h)$. Observemos que es válida aún si $h = 0$, pues entonces ambos miembros son iguales a $y(a)$. Por otro lado la segunda ecuación se deduce como sigue

$$\lim_{h\to 0} p(h) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a) \right] = \lim_{h\to 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h} - \lim_{h\to 0} y'(a)$$

$$= y'(a) - y'(a) = 0 \,.$$

Paso 2. En forma análoga, para la función $z(y)$ definimos

$$q(k) = \frac{z(b+k) - z(b)}{k} - z'(b) \,, \qquad k \neq 0 \,,$$

donde $b = y(a)$, y se cumple

$$z(b+k) = z(b) + k \,.\, z'(b) + kq(k)$$

y

$$\lim_{k\to 0} q(k) = 0 \;. \qquad \textbf{(2)}$$

Paso 3. Tomando $k = h \,.\, y'(a) + h \,.\, p(h)$ tenemos

$$z(y(a+h)) = z(y(a) + h \,.\, y'(a) + h \,.\, p(h)) \qquad \textbf{(por (1))}$$

$$= z(b+k) = z(b) + k.z'(b) + kq(k) \qquad \textbf{(por (2))}$$

$$= z(b) + [hy'(a) + h \,.\, p(h)].z'(b) + [hy'(a) + h \,.\, p(h)].q(k)$$

$$= z(b) + hz'(b).y'(a) + h[p(h) + y'(a).q(k) + p(h).q(k)] \,.$$

Luego

$$\frac{z(y(a+h)) - z(y(a))}{h} = z'(b).y'(a) + \left[p(h) + y'(a).q(k) + p(h).q(k)\right]. \qquad \textbf{(3)}$$

Paso 4. $\lim\limits_{h\to 0} \left[p(h) + y'(a).q(k) + p(h).q(k)\right] = 0$.

En efecto $\lim\limits_{h\to 0} p(h) = 0$, (por (1))

$$\lim_{h\to 0} y'(a).q(k) = y'(a).\lim_{h\to 0} q(k) = y'(a).\lim_{k\to 0} q(k) = 0$$

y $\lim\limits_{h\to 0} p(h).q(k) = 0$

Paso 5. Conclusión de la prueba.

Tomando límites en (3), cuando $h \to 0$, tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{z(y(a+h)) - z(y(a))}{h} = \lim_{h\to 0} z'(b).y'(a) = z'(b)\cdot y'(a) = z'(y(a))\cdot y'(a) ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO. Empleando la regla de la cadena, calcular

$$\frac{dy}{dx} \text{ si } y = \left(1 + 3x - 5x^2\right)^{16} .$$

SOLUCION. Sea $u = 1 + 3x - 5x^2$. Tenemos

$$y = u^{16}, \qquad \frac{dy}{du} = 16u^{15}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + 3x - 5x^2\right) = 3 - 10x .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx} = 16\,u^{15}(3 - 10x) = 16\left(1 + 3x - 5x^2\right)^{15}(3 - 10x)$

o $$\frac{dy}{dx} = 16(3 - 10x)\left(1 + 3x - 5x^2\right)^{15} .$$

8.13 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Derivada de la función seno.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable en el punto x. Probar que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v = \cos v \,.\, \frac{dv}{dx}$$

SOLUCION. En primer lugar, probaremos que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$. (1)

Tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x \,.\, \cos h + \operatorname{sen} h \,.\, \cos x - \operatorname{sen} x \\ &= -(1-\cos h)\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} h \,.\, \cos x = -2\operatorname{sen}^2(h/2)\,.\,\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} h \,.\, \cos x\end{aligned}$$

Dividiendo entre $h \neq 0$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\,.\,\operatorname{sen}(h/2)\,.\,\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} h}{h}\,.\,\cos x \,,$$

y puesto que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = 1$$

tomando límites cuando $h \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = -(1)(0).\operatorname{sen} x + (1).\cos x = \cos x \,.$$

El caso general se sigue ahora de la regla de la cadena y (1).

PROBLEMA 2. Derivada de la función coseno.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable en el punto x. Probar que

$$\frac{d}{dx}\cos v = -\operatorname{sen} v \,.\, \frac{dv}{dx} \,.$$

SOLUCION. En primer lugar, probaremos que $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$ (1)

Tenemos

$$\cos(h+x) - \cos x = \cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h - \cos x$$
$$= -(1-\cos h)\cos x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h$$
$$= -2\operatorname{sen}^2(h/2) \cdot \cos x - \operatorname{sen} h \cdot \operatorname{sen} x \,.$$

Dividiendo entre $h \neq 0$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2\operatorname{sen}^2(h/2) \cdot \cos x}{h} - \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \operatorname{sen} x$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{(h/2)} \cdot \operatorname{sen}(h/2) \cdot \cos x - \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \operatorname{sen} x \,,$$

y puesto que $\quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(h/2)}{(h/2)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

y $\quad \lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen}(h/2) = 0$,

tomando límites cuando $h \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -(1)(0)\cos x - (1)\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \,,$$

y esto demuestra (1).

El caso general sigue de la regla de la cadena y de (1)

$$\frac{d}{dx}\cos v = \frac{d}{dv}(\cos v) \cdot \frac{dv}{dx} = -\operatorname{sen} v \cdot \frac{dv}{dx} \,.$$

PROBLEMA 3. Derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable en el punto x. Probar que

1) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} v = \sec^2 v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

2) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctg} v = -\operatorname{cosec}^2 v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

3) $\dfrac{d}{dx}\sec v = \sec v \cdot \operatorname{tg} v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

4) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} v = -\operatorname{cosec} v \cdot \operatorname{ctg} v \cdot \dfrac{dv}{dx}$.

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} v = \frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right) = \frac{\cos v \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) - \operatorname{sen} v \cdot \frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\cos v \cdot \cos v \cdot \frac{dv}{dx} - \operatorname{sen} v\,(-\operatorname{sen} v)\cdot\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \frac{\left[\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v\right]}{\cos^2 v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 v}\cdot\frac{dv}{dx} = \sec^2 v \cdot \frac{dv}{dx}\ .$$

2) Tenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} v) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos v}{\operatorname{sen} v}\right) = \frac{\operatorname{sen} v \cdot \frac{d}{dx}(\cos v) - \cos v \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v)}{\operatorname{sen}^2 v}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} v\,.\,(-\operatorname{sen} v)\,\frac{dv}{dx} - \cos v \cdot \cos v \cdot \frac{dv}{dx}}{\operatorname{sen}^2 v} = \frac{-\left[\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v\right]}{\operatorname{sen}^2 v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 v}\cdot\frac{dv}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 v \cdot \frac{dv}{dx}\ .$$

3) y 4) se establecen en forma análoga. Omitimos los detalles.

PROBLEMA 4. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = 2\operatorname{sen} x - 3\cos x^2$ 2) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$ 3) $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x - 3\frac{d}{dx}\cos^2 x = 2\cos x - 3\left(-\operatorname{sen} x^2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= 2\cos x + 6\,x\operatorname{sen} x^2\ .$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x - \frac{d}{dx}\operatorname{ctg}.\frac{x}{3} = \sec^2 x - \left[-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{3}\right)\right].\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= \sec^2 x + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{3}\right).$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right)$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

y simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

PROBLEMA 5. Hallar la derivada de las siguientes funciones

1) $y = \operatorname{sen}^3 5x$ **2)** $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

3) $y = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

SOLUCION.

1) Hagamos $u = \operatorname{sen} 5x$,

Luego $y = u^3$, $\dfrac{dy}{du} = 3u^2$, $\dfrac{du}{dx} = \cos 5x . \dfrac{d}{dx}(5x) = 5\cos 5x$,

y por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 3u^2.(5\cos 5x) = 3 . \operatorname{sen}^2 5x . (5\cos 5x) = 15\operatorname{sen}^2 5x . \cos 5x .$$

2) Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) - \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}^3 x\right) + \frac{1}{5}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}^5 x\right)$$

$$= \sec^2 x - \frac{2}{3}\left(3\operatorname{tg}^2 x\right)\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{5}\left(5\operatorname{tg}^4 x\right)\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) .$$

$$= \sec^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x \,.\, \sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x \,.\, \sec^2 x$$

$$= \sec^2 x\,\left(1 - 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x\right) = \sec^2 x\,\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)^2 .$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 2x) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)$$

$$= \cos 2x \,.\, \frac{d}{dx}(2x) + \sec^2\sqrt{x}\,.\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = 2\cos 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x} .$$

PROBLEMA 6. Hallar la derivada de $y = \operatorname{cosec}^2 x + \sec^2 x$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^2 x\right) + \frac{d}{dx}\left(\sec^2 x\right)$$

$$= 2\operatorname{cosec} x \,.\, \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) + 2\sec x \,.\, \frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2\operatorname{cosec} x \,.\, (-\operatorname{cosec} x \,.\, \operatorname{ctg} x) + 2\sec x \,.\, (\sec x \,.\, \operatorname{tg} x)$$

$$= -2\operatorname{cosec}^2 x \,.\, \operatorname{ctg} x + 2\sec^2 x \,.\, \operatorname{tg} x = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

$$= 2 \cdot \frac{-\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}^3 x \,.\, \cos^3 x} = 16 \cdot \frac{-\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 + \operatorname{sen}^4 x}{(2\operatorname{sen} x \,.\, \cos x)^3}$$

$$= 16 \,.\, \frac{-1 + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^4 x}{(\operatorname{sen} 2x)^3} = 16 \,.\, \frac{-1 + 1 - \cos 2x}{(\operatorname{sen} 2x)^3} = \frac{-16\cos 2x}{(\operatorname{sen} 2x)^3} .$$

PROBLEMA 7. Derivar las siguientes funciones

1) $y = \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen}(x+A)$ 2) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ 3) $y = -\frac{1}{20}\cos\left(5x^2\right) - \frac{1}{4}\cos x^2$.

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \,.\, \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x+A) + \operatorname{sen}(x+A)\,.\,\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$$

$$= \operatorname{sen} x \,.\, \cos(x+A) + \operatorname{sen}(x+A)\,.\,\cos x = \operatorname{sen}(x+x+A) = \operatorname{sen}(2x+A) \,.$$

2) Sea $v = \operatorname{sen} x$. Tenemos $y = \operatorname{sen} v$, $\frac{dy}{dv} = \cos v$, $\frac{dv}{dx} = \cos x$.

Luego, por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\,.\,\frac{dv}{dx} = \cos v \,.\, \cos x = \cos(\operatorname{sen} x)\,.\,\cos x \,.$$

3) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{20}\,.\,\frac{d}{dx}\cos\left(5x^2\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\cos x^2$$

$$= -\frac{1}{20}\left(-\operatorname{sen}\left(5x^2\right)\right)\,.\,\frac{d}{dx}\left(5x^2\right) - \frac{1}{4}\left(-\operatorname{sen} x^2\right)\,.\,\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,x \operatorname{sen}\left(5x^2\right) + \frac{1}{2}\,x \operatorname{sen} x^2 \,.$$

PROBLEMA 8. Calcular la derivada de

(1) $y = \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$ (2) $y = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

SOLUCION.

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right) = \frac{(1-\operatorname{tg} x)\frac{d}{dx}(1+\operatorname{tg} x) - (1+\operatorname{tg} x)\frac{d}{dx}(1-\operatorname{tg} x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{(1-\operatorname{tg} x)\sec^2 x - (1+\operatorname{tg} x)\left(-\sec^2 x\right)}{(1-\operatorname{tg} x)^2} = \frac{2\sec^2 x}{(1-\operatorname{tg} x)^2} \,.$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$= x \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x} .$$

PROBLEMA 9. Hallar la derivada de $y = \cos^3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^3\left(\sqrt[3]{1-x}\right) = 3\cos^2\left(\sqrt[3]{1-x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left[\cos\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\right]$$

$$= 3\cos^2\left(\sqrt[3]{1-x}\right) \cdot \left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\right] \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\cos^2\left(\sqrt[3]{1-x}\right) . \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{1-x}\right).$$

PROBLEMA 10. Calcular la derivada de $y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$.

SOLUCION. Tenemos $y = \dfrac{(\cos x)^{-3}}{3} - (\cos x)^{-1}$

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(\cos x)^{-3} - \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-3(\cos x)^{-4}\right] \cdot \frac{d}{dx}\cos x - (-1)(\cos x)^{-2}\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= -\frac{1}{\cos^4 x}(-\operatorname{sen} x) + \frac{1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cdot \left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x} .$$

PROBLEMA 11. Derivar $y = \sqrt{A \operatorname{sen}^2 x + B \cos^2 x}$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{A \operatorname{sen}^2 x + B\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{A \operatorname{sen}^2 x + B\cos^2 x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(A \operatorname{sen}^2 x + B\cos^2 x\right) .$$

Pero

$$\frac{d}{dx}\left(A \operatorname{sen}^2 x + B\cos^2 x\right) = 2A \operatorname{sen} x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + 2B\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 2A \operatorname{sen} x \cdot \cos x - 2B\cos x \cdot \operatorname{sen} x$$

$$= (A - B) \operatorname{sen} 2x \;,$$

y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(A-B)\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{A \operatorname{sen}^2 x + B\cos^2 x}} .$$

PROBLEMA 12. Hallar la derivada de $y = |\cos 3x|$.

SOLUCION. Haciendo uso de $|a| = \left(a^2\right)^{1/2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}|\cos 3x| = \frac{d}{dx}\left(\cos^2 3x\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 3x\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\cos^2 3x$$

$$= \frac{1}{2y} \cdot 2\cos 3x \cdot \frac{d}{dx}(\cos 3x) = -\frac{3\operatorname{sen} 3x \cdot \cos 3x}{y} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 6x}{y} .$$

PROBLEMA 13. Derivar la función $x = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1 - 3\cos t}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\right) = \frac{\sqrt{1-3\cos t} \cdot \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}^3 t\right) - \operatorname{sen}^3 t \cdot \frac{d}{dt}\sqrt{1-3\cos t}}{\left(\sqrt{1-3\cos t}\right)^2}$$

Pero el numerador es igual a

$$\sqrt{1-3\cos t}\cdot 3\,\text{sen}^2 t\cdot\frac{d}{dt}(\text{sen}\,t)\ -\ \frac{\text{sen}^3 t}{2\sqrt{1-3\cos t}}\cdot\frac{d}{dt}(1-3\cos t)$$

$$=\sqrt{1-3\cos t}\,.\,3\,\text{sen}^2 t\,.\cos t\ -\ \frac{3}{2}\cdot\frac{\text{sen}^3 t\,.\,\text{sen}\,t}{\sqrt{1-3\cos t}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\text{sen}^2 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\left[2(1-3\cos t)\cos t-\text{sen}^2 t\right]$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\text{sen}^2 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\left(2\cos t-6\cos^2 t-\text{sen}^2 t\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\text{sen}^2 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\left(2\cos t-5\cos^2 t-1\right)$$

Por tanto

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\text{sen}^2 t\,.\left(2\cos t-5\cos^2 t-1\right)}{(1-3\cos t)^{3/2}}\,.$$

PROBLEMA 14. Hallar la derivada de $y=\text{sen}\left(\cos x^2\right)$.

SOLUCION. Hagamos $v=\cos x^2$.

Tenemos $y=\text{sen}\,v$, $\dfrac{dy}{dv}=\cos v$,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\cos x^2\right)=-\,\text{sen}\left(x^2\right)\cdot\frac{d}{dx}(x)=-\,2\,x\,\text{sen}\,x^2.$$

Luego, por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}.\frac{dv}{dx}=\cos v\left(-2\,x\,\text{sen}\,x^2\right)=-\,2\,x\,\text{sen}\,x^2\,.\cos\left(\cos x^2\right).$$

PROBLEMA 15. Derivar la función $z=\dfrac{\text{ctg}^2\,2x}{1+x^2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(1+x^2\right)\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctg}^2 2x \;-\; \operatorname{ctg}^2 2x \cdot \dfrac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} .$$

Pero el numerador es igual a

$$\left(1+x^2\right) . 2 \operatorname{ctg} 2x . \left(-2 \operatorname{cosec}^2 2x\right) - \operatorname{ctg}^2 2x . 2x$$

$$= -4\left(1+x^2\right)\operatorname{ctg} 2x . \operatorname{cosec}^2 2x - 2x . \operatorname{ctg}^2 2x$$

$$= -2 \operatorname{ctg} 2x . \left[2\left(1+x^2\right)\operatorname{cosec}^2 2x + x \operatorname{ctg} 2x\right] .$$

Por tanto
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2 \operatorname{ctg} 2x . \left[2\left(1+x^2\right)\operatorname{cosec}^2 2x \;+\; x \operatorname{ctg} 2x\right]}{\left(1+x^2\right)^2} .$$

PROBLEMA 16. Derivar las siguientes funciones

1) $y = \dfrac{A \operatorname{sen} Bx \;-\; B \cos Ax}{A^2 + B^2}$ **2)** $y = \operatorname{tg}^5 5x$

3) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

SOLUCION.

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{A^2+B^2}\left[A\frac{d}{dx}\operatorname{sen} Bx \;-\; B\frac{d}{dx}\cos Ax\right] = \frac{AB}{A^2+B^2}\left(\cos Bx + \operatorname{sen} Ax\right) .$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{tg}^5 5x = 5 \operatorname{tg}^4 5x . \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} 5x) = 25 \operatorname{tg}^4 5x . \sec^2 5x .$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\operatorname{tg}^3 x \;-\; \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x + \frac{dx}{dx} = \operatorname{tg}^2 x . \sec^2 x \;-\; \sec^2 x + 1$$

$$= \operatorname{tg}^2 x . \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x . \left(\sec^2 x - 1\right) = \operatorname{tg}^4 x .$$

PROBLEMA 17. Derivar la función $y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x\,.\left(3\cos^2 x - 5\right)$.

SOLUCION.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15}\cos^3 x\,.\frac{d}{dx}\left(3\cos^2 x - 5\right) + \frac{1}{15}\left(3\cos^2 x - 5\right)\frac{d}{dx}\cos^3 x$$

$$= \frac{6}{15}\cos^4 x\,.(-\operatorname{sen} x) + \frac{3}{15}\left(3\cos^2 x - 5\right).\cos^2 x\,.(-\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{5}\cos^2 x\,.\operatorname{sen} x\,.\left[-2\cos^2 x - \left(3\cos^2 x - 5\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\cos^2 x\,.\operatorname{sen} x\,.\left[-2\cos^2 x - 3\cos^2 x + 5\right]$$

$$= \cos^2 x\,.\operatorname{sen} x\,.\left[1 - \cos^2 x\right]$$

$$= \cos^2 x\,.\operatorname{sen}^3 x\ .$$

PROBLEMA 18. Hallar la derivada de $y = 3\operatorname{sen} x\cos^2 x + \operatorname{sen}^3 x$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3\operatorname{sen} x\frac{d}{dx}\cos^2 x + 3\cos^2 x\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \frac{d}{dx}\operatorname{sen}^3 x$$

$$= -6\operatorname{sen}^2 x\,.\cos x + 3\cos^3 x + 3\operatorname{sen}^2 x\,.\cos x$$

$$= 3\cos x\left[-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right] = 3\cos x\,.\cos 2x\ .$$

PROBLEMA 19. Derivar la función $y = -\dfrac{\cos x}{3\operatorname{sen}^3 x} + \operatorname{ctg} x$.

SOLUCION. Tenemos $y = -\dfrac{1}{3}\cos x\,.(\operatorname{sen} x)^{-3} + \operatorname{ctg} x$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\cos x\left[-3(\operatorname{sen} x)^{-4}\cos x\right] - \operatorname{cosec}^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^4 x}\ .$$

PROBLEMA 20. Dadas las funciones $u(x) = 1 - x$ y $v(x) = 1 - \text{sen}\,\dfrac{\pi x}{2}$, hallar $\dfrac{v'(1)}{u'(1)}$.

SOLUCION.

$$u'(1) = \frac{d}{dx}(1-x)\bigg|_{x=1} = -1$$

$$v'(1) = \frac{d}{dx}\left(1 - \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}\right)\bigg|_{x=1} = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\bigg|_{x=1} = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0 .$$

Luego

$$\frac{v'(1)}{u'(1)} = 0 .$$

PROBLEMA 21. Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = \text{sen}\,mx\,\text{sen}^m x$ 2) $y = (3 - 5\,\text{sen}\,x)^{2/5}$.

SOLUCION.

1) $$\frac{dy}{dx} = \text{sen}\,mx \,.\, \frac{d}{dx}\left(\text{sen}^m x\right) + \text{sen}^m x \,.\, \frac{d}{dx}\text{sen}\,mx$$

$$= m\,\text{sen}\,mx \,.\, \text{sen}^{m-1} x \,.\, \cos x + m\,\text{sen}^m x \,.\, \cos mx$$

$$= m\,\text{sen}^{m-1} x \,.\, [\text{sen}\,mx \,.\, \cos x + \text{sen}\,x \,.\, \cos mx]$$

$$= m\,\text{sen}^{m-1} x \,.\, \text{sen}\,(m+1)\,x \,.$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{5}(3 - 5\,\text{sen}\,x)^{-3/5}\frac{d}{dx}(3 - 5\,\text{sen}\,x) = -\frac{2\cos x}{(3 - 5\,\text{sen}\,x)^{3/5}} .$$

PROBLEMA 22. Derivar la función $y = \sqrt{\text{ctg}\,x} - \sqrt{\text{ctg}\,A}$.

SOLUCION. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{ctg}\,x}} \,.\, \frac{d}{dx}(\text{ctg}\,x) = -\frac{\text{cosec}^2 x}{2\sqrt{\text{ctg}\,x}} .$$

PROBLEMA 23. Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{\sec 2x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec}^3 x}$

SOLUCION. Tenemos

$$y = \frac{\sec 2x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec}^3 x} = \frac{\dfrac{1}{\cos 2x}\sqrt{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - 1}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x}} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos 2x}\sqrt{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}\sqrt{\cos 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\cos 2x}} .$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(\cos 2x)^{3/2}} \operatorname{sen} 2x + \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{(\cos 2x)^{1/2}} = \frac{\operatorname{sen} 2x \cdot \cos^2 x}{(\cos 2x)^{3/2}} .$$

PROBLEMA 24. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = \operatorname{tg} 3x$ en el punto $(0, 0)$.

SOLUCION. Tenemos $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} = \left[3 \sec^2 3x\right]_{x=0} = 3$.

Luego, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la recta dada en el punto (0, 0) son

$$\frac{y-0}{x-0} = 3 \quad \text{o} \quad y = 3x , \quad \text{y} \quad \frac{y-0}{x-0} = -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{3}x ,$$

respectivamente.

PROBLEMA 25. ¿Qué ángulo forman las curvas $f(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

SOLUCION. Tenemos

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{4\sqrt{3}}{\pi}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \ , \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{dg}{dx}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \left[\cos x\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Luego, la tangente a $f(x)$ en el punto dado forma un ángulo de 60° con el eje X, y la tangente a $g(x)$ en el mismo punto forma un ángulo de 45°. Por tanto, el ángulo comprendido entre las dos curvas en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es de 15°.

PROBLEMA 26. Hallar todos los puntos en los cuales la recta $y = 4x$ es paralela a la curva $y = \operatorname{tg} x$.

SOLUCION. Buscamos todos los x_1 tales que

$$\frac{d}{dx}|4x|_{x=x_1} = \frac{d}{dx}|\operatorname{tg} x|_{x=x_1} \qquad 4 = \sec^2 x_1 \qquad \text{o} \qquad \cos x_1 = \pm\frac{1}{2} \ .$$

Luego $$x_1 = \frac{\pi}{6} + n\pi \ , \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

PROBLEMA 27. Probar que la función $y = |\operatorname{sen} x|$ no es derivable solamente en los puntos $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

SOLUCION.

1. ***Calculamos la derivada de la función.***

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}|\operatorname{sen} x| = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \, . \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{1/2}} = \frac{\operatorname{sen} x \, . \cos x}{|\operatorname{sen} x|} \ .$$

Luego, la función es derivable en todos los puntos x tales que $\operatorname{sen} x \neq 0$, o sea cuando $x \neq n\pi$.

2. ***Probaremos que y no es derivable en $x = n\pi$.***

Calculamos las derivadas laterales

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ (n\pi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|\text{sen}\,(n\pi + h)| - |\text{sen}\,(n\pi)|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|\cos n\pi \,.\, \text{sen}\, h|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{|\text{sen}\, h|}{h} \qquad \text{(Pues } \cos n\pi = \pm 1\text{)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\text{sen}\, h}{h} = 1 ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- (n\pi) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|\text{sen}\,(n\pi + h)| - |\text{sen}\,(n\pi)|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|\cos n\pi \,.\, \text{sen}\, h|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{|\text{sen}\, h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{\text{sen}\, h}{h} = -1 .$$

Luego, las derivadas laterales $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ (n\pi)$ y $\left(\frac{dy}{dx}\right)_- (n\pi)$ son distintas y por consiguiente no existe la derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)(n\pi)$.

PROBLEMA 28. Haciendo uso de la regla de la cadena, hallar

1) $\frac{d}{dx} f(x + a)$ 2) $\frac{d}{dx} f(ax)$ 3) $\frac{d}{dx} f\left(\cos\left(x^2 - 1\right)\right)$.

SOLUCION.

1) Sea $u = x + a$. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{df}{du}(x + a) . \frac{d}{dx}(x + a) = f'(x + a) .$$

2) Sea $u = ax$. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{df}{du}(ax) . \frac{d}{dx}(ax) = f'(ax) . a = a . f'(ax) .$$

3) Sea $u = \cos\left(x^2 - 1\right)$. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx} = f'\left(\cos\left(x^2-1\right)\right).\frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)$$

$$= f'\left(\cos\left(x^2-1\right)\right).\left(-\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)\right).2x = -2x\operatorname{sen}\left(x^2-1\right).f'\left(\cos\left(x^2-1\right)\right).$$

PROBLEMA 30. Sean $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=3\operatorname{sen}x$.

(1) Hallar la derivada de $g(f(x))$. (2) Hallar la derivada de $f(g(x))$.

SOLUCION.

1) Tenemos $g(f(x))' = g'(f(x)).f'(x)$.

Pero $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $g'(x)=3\cos x$,

y por tanto $g'(f(x)) = 3\cos(f(x)) = 3\cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

Luego $g(f(x))' = -\dfrac{6x}{\left(1+x^2\right)^2}.\cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

2) Tenemos $f(g(x))' = f'(g(x)).g'(x)$.

Pero $g'(x)=3\cos x$, $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$,

y por lo tanto $f'(g(x)) = -\dfrac{2\,g(x)}{\left(1+g(x)^2\right)^2} = -\dfrac{6\operatorname{sen}x}{\left(1+9\operatorname{sen}^2x\right)^2}$.

Luego $f(g(x))' = -\dfrac{9\operatorname{sen}2x}{\left(1+9\operatorname{sen}^2x\right)^2}$

Capítulo 9

Aplicaciones de la Derivada

9.1 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $y = f(x)$ una función. Llamamos

(1) *primera derivada de* y, a la función $y^{(1)}(x) = \dfrac{dy}{dx}(x)$,

que está definida en todos los puntos donde existe $\dfrac{dy}{dx}(x)$,

(2) *segunda derivada de* y, a la función

$$y^{(2)}(x) = \textit{derivada de } y^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(y^{(1)}(x)\right) ;$$

y en general, por inducción sobre $n \geq 1$

(3) *enésima derivada de* y, a la función

$$y^{(n)}(x) = \textit{derivada de } y^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}(x)\right) .$$

También se suelen emplear las notaciones

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} y(x) = D^n y \ , \qquad \text{o} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D^n f(x) \ .$$

Igualmente, son frecuentes las expresiones $y', y'', y''', y^{(\text{iv})}, y^{(\text{v})}, \ldots$, en lugar de $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots$, respectivamente.

El valor de la enésima derivada en un punto a se designa con

$$y^{(n)}(a) = \left[y^{(n)}(x)\right]_{x=a} = f^{(n)}(a) = \frac{d^n}{dx^n} f(a) \ .$$

Una *ecuación diferencial de orden n* en la variable *incógnita* $y = y(x)$ *y variable independiente x,* es una ecuación que contiene a las variables $x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$:

$$F\left(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

EJEMPLO 1. Hallar la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $y = x^8 + 2x^6 - 7x + 15$ **(b)** $y = \cos^2 x$.

SOLUCION.

(a) Tenemos $y^{(1)} = 8x^7 + 12x^5 - 7$,

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx} y^{(1)} = 56x^6 + 60x^4$$

(b) Tenemos $y^{(1)} = -2 \cos x \ \text{sen}\, x = -\text{sen}\, 2x$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(1)}\right) = \frac{d}{dx}(-\text{sen}\, 2x) = -2 \cos 2x$$

EJEMPLO 2. Hallar la enésima derivada de $y = \dfrac{1}{1+x}$.

SOLUCION. Escribimos $y = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Para $n = 1$ tenemos $y^{(1)} = \dfrac{d}{dx}(1+x)^{-1} = -1(1+x)^{-2}$.

Para $n = 2$ **tenemos** $y^{(2)} = \dfrac{d}{dx}\left(y^{(1)}\right) = -\dfrac{d}{dx}(1+x)^{-2} = 2\,(1+x)^{-3}.$

Para $n = 3$ **tenemos** $y^{(3)} = \dfrac{d}{dx}\left(y^{(2)}\right) = 2\dfrac{d}{dx}(1+x)^{-3} = -2\,.\,3(1+x)^{-4}.$

Luego, por inducción sobre n, se tiene:

$$y^{(n)} = (-1)^n\, n!\,(1+x)^{-n-1}, \qquad \text{donde} \qquad n! = 1\times 2\times 3\times\ldots\times n.$$

9.2 DERIVADA DE UNA FUNCION IMPLICITA.

Una *ecuación implicita entre las variables x e y* es una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Ocurre a menudo que, en tal caso, la variable y puede expresarse en forma equivalente mediante varias funciones de x.

Si tales funciones resultan ser diferenciables, entonces se puede calcular $\dfrac{dy}{dx}$ directamente a partir de la ecuación implícita dada. Basta derivar (1) respecto de x y despejar $\dfrac{dy}{dx}$ de la ecuación resultante. En general, la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ quedará expresada como una función de x e y.

EJEMPLO 1. **Hallar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de la función implícita y dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 4$.**

SOLUCION. **Tenemos** $\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + y^3\right) = \dfrac{d}{dx}(4)\,,\quad 3x^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{y^2}.$

EJEMPLO 2. **La función y es definida implícitamente por la ecuación**

$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. **Hallar** $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ **en el punto** $(1, 1)$.

SOLUCION. Derivando sucesivamente ambos miembros de la ecuación respecto de x

$$2x+2y+2xy'+2yy'-4+2y'=0 \qquad (1)$$

$$2+2y'+2y'+2xy''+2y'y'+2yy''+2y''=0 \qquad (2)$$

o $$1+2y'+xy''+(y')^2+yy''+y''=0$$

$$2y''+y''+xy'''+2y'y''+y'y''+yy'''+y'''=0 \qquad (3)$$

o $$3y''+xy'''+3y'y''+yy'''+y'''=0.$$

Sustituyendo $x=1$, $y=1$ en (1), (2) y (3) se encuentra $y'=0$, $y''=-\dfrac{1}{3}$, $y'''=\dfrac{1}{3}$.

EJEMPLO 3. Sea $f(x)=\dfrac{x^2}{4}\operatorname{sen}(x-2)$. Hallar $f'(2)$ y $f''(2)$.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \frac{x^2}{4}\cos(x-2) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}(x-2)$$

$$f''(x) = -\frac{x^2}{4}\operatorname{sen}(x-2) + \frac{x}{2}\cos(x-2) + \frac{x}{2}\cos(x-2) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x-2)$$

$$= -\frac{x^2}{4}\operatorname{sen}(x-2) + x\cos(x-2) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x-2)$$

por tanto $f'(2)=1$, $f''(2)=2$.

EJEMPLO 4. Probar que $y=\operatorname{sen} kx$ satisface la ecuación diferencial de segundo orden $y''+k^2y=0$.

SOLUCION. Tenemos $y'=k\cos kx$, $y''=(k\cos kx)'=-k^2\operatorname{sen} kx$;

luego $$y''+k^2y=-k^2\operatorname{sen} kx+k^2\operatorname{sen} kx=0.$$

EJEMPLO 5. Demostrar que $y=\dfrac{x^2}{2}+x+1$ satisface la ecuación diferencial

$$1+(y')^2=2yy'' .$$

SOLUCION. Tenemos $y' = x + 1$, $y'' = 1$.

El primer miembro es $\quad 1 + (y')^2 = 1 + (x+1)^2 = x^2 + 2x + 2,$

y el segundo miembro es $\quad 2yy'' = 2\left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right)(1) = x^2 + 2x + 2,$

de donde $\quad 1 + (y')^2 = 2yy''.$

EJEMPLO 6. Probar que la función polinomial de grado n, $y = P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ satisface la ecuación diferencial $y^{(n+1)} = 0$.

SOLUCION. Tenemos

$$
\begin{aligned}
y^{(1)} &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots + nb_n x^{n-1} \\
y^{(2)} &= 2b_2 + (3)(2)b_3 x + \ldots + n(n-1)b_n x^{n-2} \\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)} &= n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (2)(1)b_n = \textit{constante} = c\ .
\end{aligned}
$$

Luego $\quad y^{(n+1)} = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$.

EJEMPLO 7. Encontrar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas

(a) $\operatorname{tg} y = x\sqrt[3]{y}$ $\qquad$ **(b)** $\operatorname{sen}\left(y^2 - y + 1\right) = x$.

SOLUCION.

(a) Derivando ambos miembros de la ecuación respecto de x

$\sec^2 y . y' = \sqrt[3]{y} + \frac{1}{3} x y^{-2/3} y'$, obtenemos $\quad y' = \dfrac{3\sqrt[3]{y}}{3\sec^2 y - x y^{-2/3}}$.

(b) Análogamente, $\quad \cos\left(y^2 - y + 1\right)(2yy' - y') = 1, \quad y' = \dfrac{1}{\cos\left(y^2 - y + 1\right)(2y - 1)}$.

9.3 DERIVADA DE FUNCIONES REPRESENTADAS EN FORMA PARAMETRICA

Decimos que las variables x e y *están representadas paramétricamente* en función de una tercera variable o *parámetro* t si existen funciones $f(t)$ y $g(t)$ tales que

$$x = f(t) \quad , \qquad y = g(t) \ .$$

Supongamos ahora que $f(t)$ es una función diferenciable tal que $f'(t) > 0$ en todos los puntos del intervalo I (o también, $f'(t) < 0$ en todo t de I). Se prueba entonces, por el teorema de la derivada de la función inversa (que será establecido en una sección posterior del presente capítulo), que t puede expresarse como una función de x.

Explícitamente, existe una función diferenciable $h(x)$ tal que

$$x = f(t) \quad \text{si y sólo si} \quad t = h(x),$$

y la derivada $\dfrac{dh}{dx}$ es dada por $\qquad \dfrac{dh}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$ **(1)**

En particular, la función $y = g(t)$ queda expresada como una función x

$$y = g(t) = g(h(x)).$$

En estas condiciones, resulta una fórmula muy simple que permite calcular la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ en términos de $\dfrac{dy}{dt}$ y $\dfrac{dx}{dt}$, a saber

TEOREMA. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$.

PRUEBA. Aplicamos la regla de la cadena a la función compuesta de las funciones $y = g(t)$, $t = h(x)$. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dh}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{(gracias a (1)).}$$

Luego $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$

Nota. Para calcular $y_x^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ se tiene la siguiente fórmula de recurrencia:

$$y_x^{(n)} = \frac{\dfrac{d}{dt} y_x^{(n-1)}}{\dfrac{dx}{dt}} ,$$

que resulta de aplicar sucesivamente el teorema. Por ejemplo, tenemos que

$$y_x^{(2)} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(y_x'\right)}{\dfrac{dx}{dt}} , \qquad y_x^{(3)} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(y_x^{(2)}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} , \quad \text{etc.}$$

EJEMPLO 1. Hallar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de la función representada paramétricamente

$$x = a\cos t , \qquad y = a \operatorname{sen} t .$$

SOLUCION. Tenemos $\dfrac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t ,\quad \dfrac{dy}{dt} = a \cos t$.

Luego
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\operatorname{ctg} t .$$

EJEMPLO 2. Si $x = \sqrt{t^2+1},\quad y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCION. Tenemos $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} ,\quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\sqrt{t^2+1} - (t-1)\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2} = \dfrac{t+1}{\left(t^2+1\right)^{3/2}}$.

Luego
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{t+1}{\left(t^2+1\right)^{3/2}}}{\dfrac{t}{\left(t^2+1\right)^{1/2}}} = \frac{t+1}{t\left(t^2+1\right)} .$$

EJEMPLO 3. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para la función y dada por $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUCION. Tenemos $\dfrac{dx}{dt} = -2\operatorname{sen} 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2 \operatorname{sen} t \cos t = \operatorname{sen} 2t$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$.

Aplicando la fórmula $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$, obtenemos $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{-2\operatorname{sen} 2t} = 0$.

EJEMPLO 4. Si $x = \frac{2}{3}t^3 + 2$, $y = t^6 - 2t^5 + 7$, hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{6t^5 - 10t^4}{2t^2} = 3t^3 - 5t^2$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{9t^2 - 10t}{2t^2} = \frac{9t - 10}{2t}$$

Ahora bien, cuando $x = \frac{4}{3}$ se tiene $\frac{4}{3} = \frac{2}{3}t^3 + 2$ o $t = -1$, y por lo tanto

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{4}{3}\right) = \left[\frac{9t - 10}{2t}\right]_{t=-1} = \frac{19}{2} .$$

EJEMPLO 5. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

SOLUCION. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a \operatorname{sen} t}{a(1 - \cos t)} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}\right)}{a(1-\cos t)} = \frac{\dfrac{(1-\cos t)\cos t - \operatorname{sen} t(\operatorname{sen} t)}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2} .$$

9.4 APLICACIONES GEOMETRICAS.

En la sección 8.3 dimos la definición de rectas tangente y normal a una curva en un punto dado. A continuación, repetimos dicha definición y presentamos otros elementos de carácter geométrico asociados a una curva.

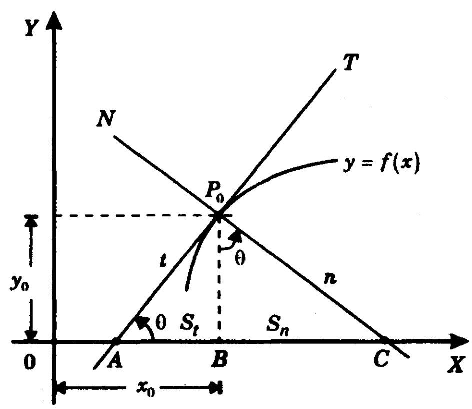
Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el punto x_0.

9.4.1 DEFINICION.

1) Se llama *recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ a la recta T cuya ecuación es

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) ,$$

esto es, T es la recta que pasa por (x_0, y_0) y cuya pendiente es $f'(x_0)$.



2) Se llama *recta normal a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ a la recta N cuya ecuación es

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) ,$$

esto es, N es la recta que pasa por (x_0, y_0), y que es perpendicular a la recta tangente T.

Sean

A el punto en el cual T interseca el eje X,

$B = (x_0, 0)$,

C el punto en el cual N interseca al eje X.

3) Definimos los siguientes *segmentos* (propiamente dicho: longitudes de segmentos)

$t = d(\mathrm{A}, P_0) =$ el *segmento de la tangente*,

$S_t = d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) =$ la *subtangente*,

$n = d(\mathrm{C}, P_0) =$ el *segmento de la normal,*

y $S_n = d(\mathrm{B}, \mathrm{C}) =$ la *subnormal.*

9.4.2 CALCULO DE LOS SEGMENTOS.

Sea $y_0' = f'(x_0)$. Entonces, si hacemos $y = 0$ en las ecuaciones de las rectas tangente y normal, obtenemos respectivamente

$$-y_0 = y_0'(x - x_0) \quad \text{o} \quad x = -\frac{y_0}{y_0'} + x_0$$

y

$$-y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0) \quad \text{o} \quad x = y_0 y_0' + x_0 \,,$$

Luego

$$\mathrm{A} = \left(-\frac{y_0}{y_0'} + x_0 \,,\, 0\right) \quad \text{y} \quad \mathrm{C} = (y_0 y_0' + x_0 \,,\, 0) \,.$$

Por lo tanto

$$t = d(\mathrm{A}, P_0) = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + (y_0')^2}\right| \qquad n = d(\mathrm{C}, P_0) = \left|y_0\sqrt{1 + (y_0')^2}\right|$$

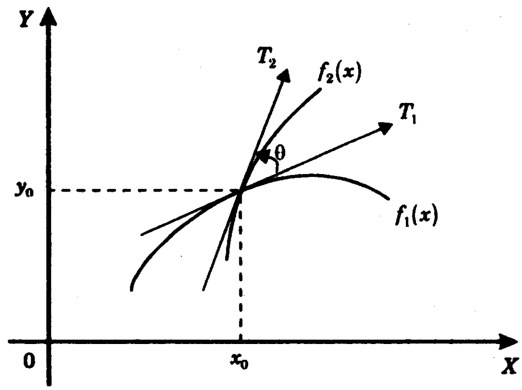
$$S_t = d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right| \qquad S_n = d(\mathrm{B}, \mathrm{C}) = |y_0 y_0'|$$

9.4.3 ANGULO ENTRE DOS CURVAS.

Definición. Se llama ángulo entre las curvas

$$y = f_1(x) \quad , \qquad y = f_2(x) \,,$$

en un punto común $P_0 = (x_0, y_0)$, al ángulo θ entre las tangentes T_1 y T_2 a las curvas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, respectivamente, en el punto (x_0, y_0).

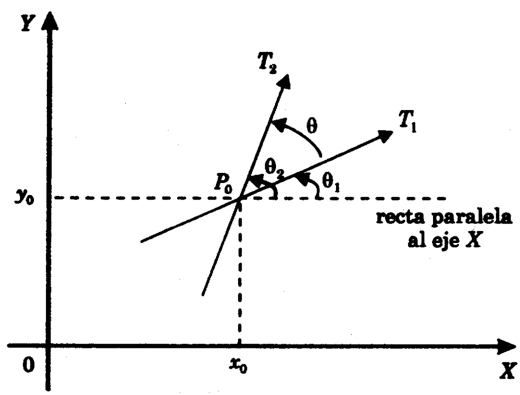


Para $i = 1, 2,$ sea θ_i el ángulo entre el eje X y la recta T_i .

Se tiene entonces $\theta = \theta_2 - \theta_1$, (1)

$$\operatorname{tg} \theta_1 = f_1'(x_0) \,, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = f_2'(x_0) \,, \tag{3}$$



Luego, de (1) $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}$,

y de (2) y (3) $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) . f_2'(x_0)}$

EJEMPLO 1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto (2, 1) de la curva

$$x = \frac{1+t}{t^3}, \qquad y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} - 1 .$$

SOLUCION. En primer lugar, hallamos el valor de t que da las coordenadas $x = 2$, $y = 1$, resolviendo las ecuaciones

$$2 = \frac{1+t}{t^3} \tag{1}$$

y

$$1 = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} - 1 \tag{2}$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado (2) son $t = 1, -3/4$, de las cuales solamente $t = 1$ satisface la ecuación (1).

Luego $t = 1$ da lugar al punto $(2, 1)$.

Ahora calculamos la pendiente $\frac{dy}{dx}(2)$, o sea cuando $t = 1$. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3+2t}{t^4}, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt}(1) = -5$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2}, \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt}(1) = -\frac{3}{(1)^3} - \frac{1}{2(1)^2} = -\frac{7}{2}$$

Por tanto

$$\frac{dy}{dx}(2) = \frac{\frac{dy}{dt}(1)}{\frac{dx}{dt}(1)} = \frac{-\frac{7}{2}}{-5} = \frac{35}{2},$$

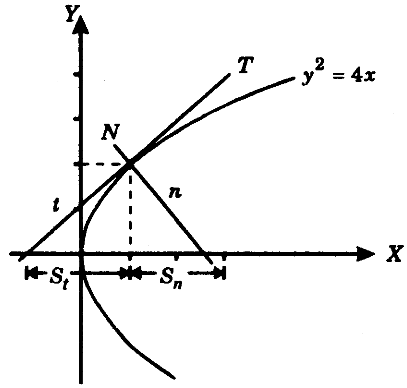
y las ecuaciones de las rectas tangente t normal a la curva en el punto (2, 1) son, respectivamente,

$$y - 1 = \frac{35}{2}(x-2) \qquad\qquad y - 1 = -\frac{2}{35}(x-2)$$

EJEMPLO 2. Hallar la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal de la parábola $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$.

SOLUCION.

Tenemos $x_0 = 1$, $y_0 = 2$,



$y_0' = \dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(1, 2)$,

$= \dfrac{2}{y}$ en $(1,2)$, (derivando la ecuación implícita $y^2 = 4x$ respecto de x)

$= \dfrac{2}{2} = 1$.

Aplicando las fórmulas que dan las longitudes de los segmentos, tenemos:

$$t = \left| \frac{y_0}{y_0'} \sqrt{1+(y_0')^2} \right| = \left| \frac{2}{1} \sqrt{1+(1)^2} \right| = 2\sqrt{2} \ ,$$

$$n = \left| y_0 \sqrt{1+(y_0')^2} \right| = \left| 2\sqrt{1+(1)^2} \right| = 2\sqrt{2} \ ,$$

$$S_t = \left| \frac{y_0}{y_0'} \right| = \left| \frac{2}{1} \right| = 2 \ ,$$

$$S_n = \left| y_0 \, y_0' \right| = \left| 2(1) \right| = 2 \ .$$

EJEMPLO 3. ¿Qué ángulo forman las curvas $x^2 + y^2 = 8ax$ y $(2a - x)y^2 = x^3$ en el punto común $\left(\dfrac{8a}{5}, \dfrac{16a}{5} \right)$?

SOLUCION. Derivando las ecuaciones implícitas $x^2 + y^2 = 8ax$ y $(2a - x)y^2 = x^3$ respecto de x, tenemos

$$y' = \frac{4a - x}{y}$$

y $$y' = \frac{3x^2 + y^2}{2(2a - x)y} \ , \quad \text{respectivamente.}$$

Luego, las pendientes de las curvas en el punto dado son

$$y' = \frac{4a - \frac{8}{5}a}{\frac{16}{5}a} = \frac{3}{4} \qquad \text{y} \qquad y' = \frac{3\left(\frac{8a}{5}\right)^2 + \left(\frac{16a}{5}\right)^2}{2\left(2a - \frac{8a}{5}\right)\frac{16\,a}{5}} = 7\,,$$

y por tanto, la tangente del ángulo θ entre las curvas es $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{7 - \frac{3}{4}}{1 + 7\left(\frac{3}{4}\right)} = 1$.

Así, las curvas se cortan en $\left(\dfrac{8a}{5}, \dfrac{16a}{5}\right)$ formando un ángulo de 45°.

9.5 RAZON DE CAMBIO. VELOCIDAD Y ACELERACION.

9.5.1 DEFINICION. Consideremos la función $y = f(x)$.
Se llama *razón de cambio (instantánea)* de la función en el punto x_1 , al valor de la derivada de $y = f(x)$ en el punto x_1 , esto es

razón de cambio de y *en el punto* $x_1 = y'(x_1)$

Como una motivación de la definición que acabamos de establecer, observamos lo siguiente

(1) Para un cambio o incremento Δx de x_1 , el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}\,,$$

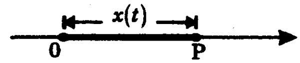
es una razón entre los cambios de los valores de ambas variables, y se le llama *razón de cambio promedio de la función* $y = f(x)$ *cuando* x_1 *cambia a* $x_1 + \Delta x$ *(o en el intervalo con extremos en* x_1 *y* $x_1 + \Delta x$*)*.

(2) Puesto que, por definición,

$$y'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

tenemos que $y'(x_1)$ representa intuitivamente la razón de cambio “instantánea” en x_1 .

9.5.2 DEFINICION. Supongamos que una partícula P se mueve a lo largo de una línea recta, de manera que se cumple la *ley de movimiento*



$$x = x(t)\ ,$$

donde $x(t)$ designa la (coordenada de) posición de P respecto de un punto fijo 0, cuando el tiempo es t unidades. Definimos

(1) *velocidad instantánea de P en* $\quad t_1 = v(t_1) = \dfrac{dx}{dt}(t_1)\ ,$

(2) aceleración *instantánea de P en* $\quad t_1 = a(t_1) = \dfrac{dv}{dt}(t_1) = \dfrac{d^2x}{dt^2}(t_1)\ .$

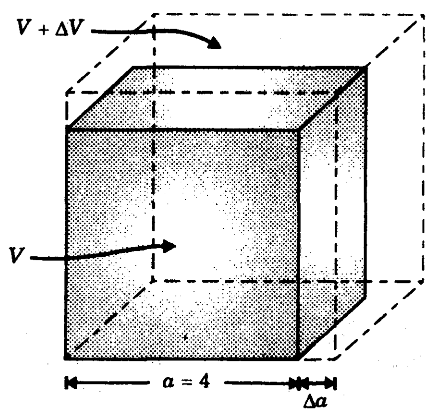
EJEMPLO 1. Sea V metros cúbicos el volumen de un cubo de a metros de arista.

1) Hallar la razón de cambio promedio de V cuando a cambia de

i) 4 a 4.3 , ii) 4 a 4.1 , iii) 4 a 3.9 .

2) Hallar la razón de cambio de V cuando $a = 4$.

SOLUCION.



Sabemos que $V = V(a) = a^3$.

1) (i). Tenemos

$$a = 4\ ,\quad \Delta a = 4.3 - 4 = 0.3\ .$$

Luego

$$\frac{V(a+\Delta a) - V(a)}{\Delta a} = \frac{(4.3)^3 - 4^3}{0.3} = 51.69\ .$$

1) (ii). Tenemos

$$a = 4\ ,\quad \Delta a = 4.1 - 4 = 0.1\ .$$

Luego

$$\frac{V(a+\Delta a) - V(a)}{\Delta a} = \frac{(4.1)^3 - 4^3}{0.1} = \frac{4.921}{0.1} = 49.21\ .$$

1) (iii). Tenemos $a = 4\ ,\ \Delta a = 3.9 - 4 = -0.1\ .$

Luego $$\frac{V(a+\Delta a) - V(a)}{\Delta a} = \frac{(3.9)^3 - 4^3}{-0.1} = \frac{-4.681}{-0.1} = 46.81\ .$$

2) Tenemos $\dfrac{dV}{da} = 3\,a^2$.

Luego $\left|\dfrac{dV}{da}\right|_{a=4} = 3(4)^2 = 48$.

EJEMPLO 2. La ley de movimiento de un punto es $S = t^2 - 3t + 5$, donde S es la distancia dada en cms., y t es el tiempo dado en segundos.

1) ¿Cuál es la velocidad del punto cuando $t = 1$ y 5 ?

2) ¿Cuál es la velocidad promedio del punto en el intervalo $1 \le t \le 5$?.

SOLUCION.

1) Tenemos $\quad v(t) = \dfrac{dS}{dt} = 2t - 3$.

Luego $\quad v(1) = -1 , \qquad v(5) = 7$.

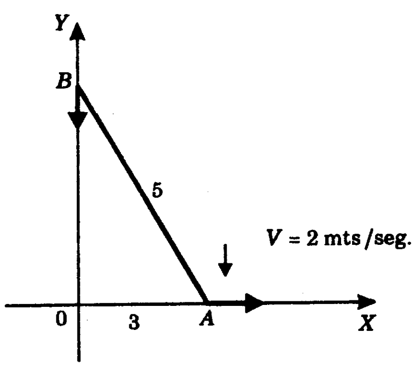
2) Tenemos $t = 1$, $\Delta t = 5 - 1 = 4$. Luego

$$\textit{velocidad en el intervalo } 1 \le t \le 5 = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\left[5^2 - 3(5) + 5\right] - \left[1^2 - 3(1) + 5\right]}{4}$$

$$= \frac{12}{4} = 3 .$$

EJEMPLO 3. Los puntos extremos de un segmento AB de 5 mts. de longitud yacen sobre los ejes de coordenadas X e Y, respectivamente. A se mueve con una velocidad constante de 2 mts./seg. ¿Cuál es la razon de movimiento de B cuando A se encuentra a una distancia de 3 mts. del origen ?



SOLUCION.

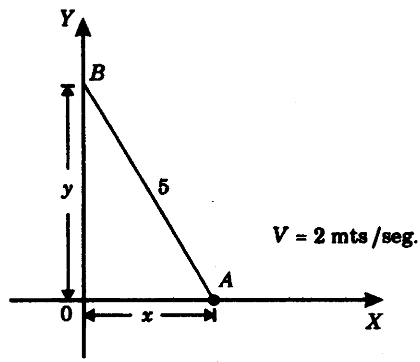
En el triángulo rectángulo BOA tenemos

$$x^2 + y^2 = 25$$

Derivando respecto de t, obtenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

o
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$



Si $x = 3$, entonces

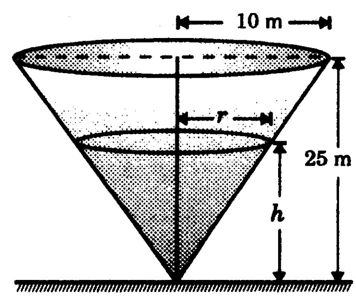
$$y = \sqrt{25-(3)^2} = 4$$

y como $\dfrac{dx}{dt} = 2$,

sustituyendo en la ecuación obtenida, resulta

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(2) = -\frac{3}{2}.$$

EJEMPLO 4. Se vierte agua en un depósito que tiene la forma de un cono invertido a razón de 16 m^3/hora. El cono tiene 25 m. de profundidad y 20 m. de diámetro en su parte superior. Si tiene una fuga de agua en la base y el nivel del agua está subiendo a razón de 1/9 m/hora cuando el agua tiene 15 m. de profundidad, ¿con qué rapidez sale el agua del depósito?



SOLUCION.

Sean

$t =$ el tiempo en horas ,

$h =$ la altura en metros del nivel del agua en el tiempo t ,

$r =$ el radio en metros de la superficie del agua en el tiempo t ,

y $\quad v =$ volumen en metros cúbicos del agua en el tanque en el tiempo t .

Calculamos el volumen V cuando el agua tiene h metros de profundidad.

Tenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \; , \qquad \text{y} \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{25} \quad \text{(Por semejanza de triángulos).}$$

Luego, sustituyendo $r = \dfrac{2h}{5}$ en la primera fórmula, resulta

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4}{75}\pi h^3 \tag{1}$$

Puesto que se cumple

razón de cambio de volumen = razón de entrada − razón de salida

tenemos
$$\frac{dV}{dt} = 16 - \frac{dS}{dt} ,$$

donde $\dfrac{dS}{dt}$ designa la razón de salida de agua del depósito por hora.

Así,
$$\frac{dS}{dt} = 16 - \frac{dV}{dt} \tag{2}$$

y debemos calcular $\dfrac{dS}{dt}$ cuando $h = 15$ y $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{9}$.

Derivando ambos miembros de la ecuación (1) respecto del tiempo t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{25}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

y sustituyendo los valores indicados

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{25}\pi (15)^2\left(\frac{1}{9}\right) = 4\pi \tag{3}$$

Finalmente, (3) y (2) da
$$\frac{dS}{dt} = 16 - 4\pi \cong 16 - 4(3.14) = 3.44$$

Por tanto, la rapidez con que el agua sale del depósito es $3.44 \ m^3/\text{hora}$.

9.6 PROBLEMAS RESUELTOS.

9.6.1 PROBLEMAS DE DERIVACION DE ECUACIONES PARAMETRICAS.

PROBLEMA 1. Dadas las ecuaciones paramétricas $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(t+1)^2 t - 2t^2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2t}{(t+1)^3} \ .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\dfrac{2t}{t+1}$.

PROBLEMA 2. Encontrar la derivada de $y' = \dfrac{dy}{dx}$, si

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \ , \qquad y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \ .$$

SOLUCION.

$$\frac{dx}{dt} = at\cos t \ , \qquad \frac{dy}{dt} = at \operatorname{sen} t \ ,$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{at \operatorname{sen} t}{at\cos t} = \operatorname{tg} t$.

PROBLEMA 3. Probar que la función y dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2t + 5t^4 \qquad \text{y} \qquad y = t^2 + 4t^5$$

satisface la ecuación diferencial

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 .$$

SOLUCION. $\dfrac{dx}{dt} = 2 + 20t^3$

y $\dfrac{dy}{dt} = 2t + 20t^4$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{2t+20t^4}{2+20t^3} = t\ ,$$

y por tanto $$y = t^2 + 4t^5 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 .$$

PROBLEMA 4. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en cada uno de los siguientes casos

(1) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\,\mathrm{sen}^2\, t \end{cases}$, (2) $\begin{cases} x = a\cos^n t \\ y = b\,\mathrm{sen}^n\, t \end{cases}$.

SOLUCION.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -2a\cos t\ \mathrm{sen}\, t$ y $\dfrac{dy}{dt} = 2b\,\mathrm{sen}\, t\ \cos t$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{2b\,\mathrm{sen}\, t\ \cos t}{-2a\,\mathrm{sen}\, t\ \cos t} = -\frac{b}{a} .$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -n\,a\cos^{n-1} t\ .\ \mathrm{sen}\, t$ y $\dfrac{dy}{dt} = nb\,\mathrm{sen}^{n-1} t\,.\cos t$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{\mathrm{sen}^{n-2} t}{\cos^{n-2} t} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}^{n-2} t\ .$$

PROBLEMA 5. Hallar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{a\left(1-t^2\right)}{1+t^2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

SOLUCION.

(1) $$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(1+t^2\right)(2a) - 2\,a\,t(2t)}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{2\,a\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\ ,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\left(1+t^2\right)(-2at) - a\left(1-t^2\right)(2t)}{\left(1+t^2\right)^2} = -\frac{4at}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Así $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{2t}{1-t^2}.$$

(2) $$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(1+t^3\right)(3a) - 3at\left(3t^2\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\left(1+t^3\right)(6at) - 3at^2\left(6t^2\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{6at\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = 2t.$$

PROBLEMA 6. La función y está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \quad y = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos 2t}}. \quad \text{Hallar } \frac{dy}{dx}.$$

SOLUCION.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,(-\operatorname{sen} t) - \cos t\left(\dfrac{-\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\right)}{\cos 2t} = \frac{-\cos 2t\,.\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t\,.\cos t}{(\cos 2t)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sen} t}{(\cos 2t)^{3/2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,.\cos t - \operatorname{sen} t\left(\dfrac{-\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\right)}{\cos 2t} = \frac{\cos 2t\,.\cos t + \operatorname{sen} 2t\,.\operatorname{sen} t}{(\cos 2t)^{3/2}} = \frac{\cos t}{(\cos 2t)^{3/2}}$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \operatorname{ctg} t.$$

PROBLEMA 7. Hallar la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal de la curva

$$x = a(t - \operatorname{sen} t)\ , \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad \text{en cada} \quad (x, y).$$

SOLUCION. Calculamos $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)\ , \qquad \frac{dy}{dt} = a \operatorname{sen} t\ .$$

Luego $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$.

Tenemos

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}{(1 - \cos t)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1 - \cos t}} = \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\ .$$

Luego

(1) *T = Longitud de la tangente* $= \left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + (y')^2}\right|$

$$= \left|\frac{a\,(1 - \cos t)}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{t}{2}}\right| = \left|\frac{a(1 - \cos t)^2}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{t}{2}}\right|$$

$$= 2\left| a\,\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right| = 2\left| a \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) . \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

(2) $n =$ *Longitud de la normal* $= \left| y\sqrt{1 + (y')^2}\right| = \left|\dfrac{a(1 - \cos t)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right| = 2\,a\left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|$

(3) S_T = *Longitud de la subtangente* $= \left|\dfrac{y}{y'}\right| = \left|\dfrac{a(1-\cos t)}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}}\right|$

$$= \left|\frac{a\,(1-\cos t)^2}{\operatorname{sen} t}\right| = \left|2a\frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right| = \left|2a\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)\,.\,\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right| ,$$

(4) S_n = *Longitud de la subnormal* $= |yy'| = \left|a\,(1-\cos t)\,.\,\dfrac{\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)}\right| = |\,a\operatorname{sen} t\,|$.

PROBLEMA 8. Hallar la derivada $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ de la función y dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \sqrt{t} \quad , \qquad y = \sqrt[3]{t}\ .$$

SOLUCION.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}t^{-1/2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}t^{-2/3},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{t^{-2/3}}{t^{-1/2}} = \frac{2}{3}t^{-1/6}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}t^{-7/6}\right) = -\frac{1}{9}t^{-7/6}$$

Así
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-\dfrac{1}{9}t^{-7/6}}{\dfrac{1}{2}t^{-1/2}} = -\frac{2}{9}t^{-2/3}\ .$$

PROBLEMA 9. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en cada uno de los siguientes ejercicios

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = a\,(\operatorname{sen} t - t\cos t) \\ y = a\,(\cos t + t\operatorname{sen} t) \end{cases}$

SOLUCION.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,.\operatorname{sen} t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3a\operatorname{sen}^2 t\,.\cos t$,

$\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = -\sec^2 t$.

Luego $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\,.\operatorname{sen} t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\,.\operatorname{sen} t}.$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = at\operatorname{sen} t$, $\dfrac{dy}{dt} = at\cos t$, $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} t$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = -\operatorname{cosec}^2 t$.

Luego $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\operatorname{cosec}^2 t}{at\operatorname{sen} t} = -\frac{1}{at\operatorname{sen}^3 t}.$$

PROBLEMA 10. Calcular $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ de la función y dada por las ecuaciones paramétricas $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$.

SOLUCION. $\dfrac{dx}{dt} = \sec t\ \operatorname{tg} t$, $\dfrac{dy}{dt} = \sec^2 t$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t.\operatorname{tg} t} = \operatorname{cosec} t,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\operatorname{cosec} t.\operatorname{ctg} t ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\operatorname{cosec} t.\operatorname{ctg} t}{\sec t.\operatorname{tg} t} = -\operatorname{ctg}^3 t$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -3\operatorname{ctg}^2 t\left(-\operatorname{cosec}^2 t\right) = 3\operatorname{ctg}^2 t.\operatorname{cosec}^2 t.$$

Finalmente, $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\operatorname{ctg}^2 t.\operatorname{cosec}^2 t}{\sec t.\operatorname{tg} t} = \frac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\operatorname{sen} t}.$$

9.6.2 PROBLEMAS SOBRE DERIVACION DE FUNCIONES IMPLICITAS.

PROBLEMA 11. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ de la función implícita y en cada uno de los siguientes ejercicios

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (2) $5x^2 + 2xy - y^2 + 7x + 3 = 0$ (3) $x^3 - x^2y + y^2 = 0$.

SOLUCION.

(1) Derivando ambos miembros de la ecuación respecto de x $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}y' = 0$.

Luego $y' = \dfrac{b^2x}{a^2y}$.

(2) Derivando respecto de x $10x + 2y + 2xy' - 2yy' + 7 = 0$.

Luego $y' = \dfrac{10x + 2y + 7}{2(y - x)}$.

(3) Análogamente $3x^2 - 2xy - x^2y' + 2yy' = 0$, y por lo tanto $y' = \dfrac{2xy - 3x^2}{2y - x^2}$.

PROBLEMA 12. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en los siguientes casos

(1) $\operatorname{tg} y = 2xy$ (2) $\operatorname{tg} xy = \dfrac{x}{y}$.

SOLUCION.

(1) Derivando ambos miembros de la ecuación respecto de x

$\sec^2 y . y' = 2y + 2xy'$, y por lo tanto $y' = \dfrac{2y}{\sec^2 y - 2x}$

(2) Similarmente $\sec^2(xy) \cdot \dfrac{d}{dx}(xy) = \dfrac{y - xy'}{y^2}$,

$$\sec^2(xy) . \left[y + xy'\right] = \frac{y - xy'}{y^2},$$

de donde $y' = \dfrac{y\left(1 - y^2\sec^2 xy\right)}{x\left(1 + y^2\sec^2 xy\right)}$.

PROBLEMA 13. Hallar y' en el punto $(-1,1)$ si $x^2+4xy+y^2-3x+y-2=0$.

SOLUCION. Derivando la ecuación implícita respecto de x

$$2x+4y+4xy'+2yy'-3+y'=0$$

de donde $y' = \dfrac{-2x-4y+3}{4x+2y+1}$ y sustituyendo $x=-1$, $y=1$, resulta $y'=-1$.

PROBLEMA 14. Hallar y'' en $(2,1)$ si $x^4-3xy+y^4-5x=1$.

SOLUCION. Derivando sucesivamente dos veces la ecuación implícita respecto de x

$$4x^3-3y-3xy'+4y^3y'-5=0 \qquad (1)$$

$$12x^2-3y'-3y'-3xy''+12y^2(y')^2+4y^3y''=0$$

o
$$12x^2-6y'-3xy''+12y^2(y')^2+4y^3y''=0 \qquad (2)$$

sustituyendo $x=2$, $y=1$, en la ecuación (1) resulta $y'=12$, y con estos tres valores en la ecuación (2) obtenemos $y''=852$.

PROBLEMA 15. Si $x^2+y^2=a^2$ hallar $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

SOLUCION. Derivando respecto de x consecutivamente

$$2x+2yy'=0 \qquad (1)$$

$$1+(y')^2+yy''=0 \qquad (2)$$

$$2y'y''+y'y''+yy'''=0 \quad \text{o} \quad 3y'y''+yy'''=0 \qquad (3)$$

De (1) obtenemos $y'=-\dfrac{x}{y}$ (4)

y sustituyendo este valor en (2), resulta $y''=-\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$ (5)

Finalmente, reemplazando (4) y (5) en (3) da $y'''=-\dfrac{3x\left(x^2+y^2\right)}{y^5}=-\dfrac{3xa^2}{y^5}$.

PROBLEMA 16. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y^4 = 4x^4 + 6xy$ en el punto $(1,2)$.

SOLUCION. En primer lugar calculamos y' en el punto $(1,2)$.

Derivando la ecuación implícita respecto de x

$$4y^3 y' = 16x^3 + 6y + 6xy' \ ,$$

de donde sustituyendo $x = 1$, $y = 2$, obtenemos $y' = \dfrac{14}{13}$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = \frac{14}{13}(x-1) \qquad \text{o} \qquad 14x - 13y + 12 = 0,$$

y la ecuación de la normal es

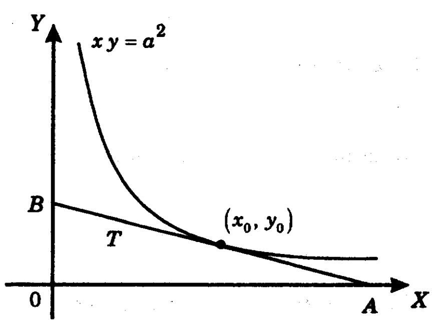
$$y - 2 = -\frac{13}{14}(x-1) \qquad \text{o} \qquad 13x + 14y - 41 = 0$$

PROBLEMA 17. Probar que el punto de contacto de una tangente a la hipérbola $xy = a^2$ divide en dos partes iguales al segmento de la tangente comprendida entre los ejes de coordenadas.

SOLUCION.

Sea T la recta tangente en el punto (x_0, y_0) de la hipérbola y designemos con A y B los puntos de intersección de T con los ejes X e Y, respectivamente. Debemos probar que

$$\frac{1}{2}(A + B) = (x_0, y_0).$$



Derivando la ecuación $xy = a^2$ respecto de x obtenemos

$$y' = -\frac{y}{x} \ ,$$

y por tanto la pendiente de la tangente en (x_0, y_0) es $y_0' = -\dfrac{y_0}{x_0}$.

La ecuación de T es entonces

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0).$$

Haciendo $y = 0$ obtenemos $x = 2x_0$. Luego $A = (2x_0, 0)$.

Y haciendo $x = 0$ obtenemos $y = 2y_0$. Luego $B = (0, 2y_0)$.

Por tanto, $\frac{1}{2}(A + B) = (x_0, y_0)$.

PROBLEMA 18. Demostrar que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de la tangente en un punto cualquiera a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = b^{1/2}$ es igual a b.

SOLUCION. Sea T la recta tangente a la curva dada en el punto (x_0, y_0) y designamos con A y B los puntos de intersección de T con los ejes X e Y, respectivamente. Vamos a calcular las coordenadas de A y B.

Derivando la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = b^{1/2}$ respecto de x obtenemos $y' = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$,

y por tanto la pendiente en el punto (x_0, y_0) es $y_0' = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{1/2}$.

La ecuación de T es entonces $y - y_0 = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{1/2}(x - x_0)$

Haciendo $y = 0$, obtenemos $x = x_0 + (x_0 y_0)^{1/2}$. Luego

$$A = \left(x_0 + (x_0 y_0)^{1/2},\ 0\right).$$

Y haciendo $x = 0$, obtenemos $y = y_0 + (x_0 y_0)^{1/2}$.

Luego $B = \left(0,\ y_0 + (x_0 y_0)^{1/2}\right)$.

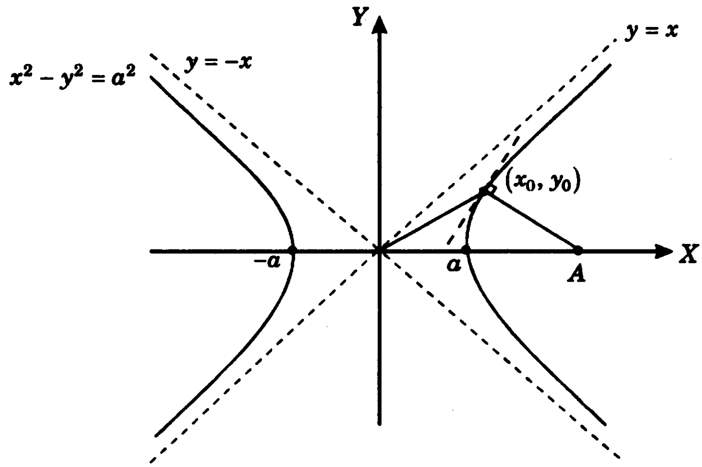
Por consiguiente, la suma de las coordenadas de A y B es

$$x_0 + 2(x_0 y_0)^{1/2} + y_0 = \left[x_0^{1/2} + y_0^{1/2}\right]^2 = \left(b^{1/2}\right)^2 = b,$$

que era lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 19. Probar que la distancia de un punto cualquiera de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ al origen es igual a la longitud del segmento normal a la hipérbola en ese punto.

SOLUCION.



Vamos a calcular la longitud del segmento normal a la hipérbola en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Derivando la ecuación respecto de x obtenemos $\quad 2x - 2yy' = 0$,

y por tanto la pendiente de la curva en el punto dado es $\quad y_0' = \dfrac{x_0}{y_0}$.

Luego la longitud de la normal a la curva es

$$n = \left| y_0 \sqrt{1 + (y_0')^2} \right| \qquad \text{(usando la fórmula dada en 9.4.2)}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \qquad \text{(sustituyendo el valor de } y_0'\text{)}$$

Pero la distancia de P_0 al origen es precisamente

$$d(P_0, 0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

y por consiguiente $\quad n = d(P_0, 0)$.

PROBLEMA 20. Hallar los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales de la curva $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.

SOLUCION. Calculamos la pendiente de la curva dada en cada punto (x, y) derivando la ecuación implícita respecto de x

$$4x - 2y - 2xy' + 4yy' - 2 - 4y' = 0,$$

de donde resulta
$$y' = \frac{2x - y - 1}{x - 2y + 2} \tag{1}$$

Puntos de contacto de las tangentes horizontales.

Vamos a determinar los puntos (x, y) de la curva en los cuales las tangentes son horizontales, esto es, en los que se cumple $y' = 0$ o teniendo en cuenta (1)

$$2x - y - 1 = 0$$

o
$$y = 2x - 1 \tag{2}$$

y sustituyendo en la ecuación de la curva, obtenemos

$$2x^2 - 2x(2x - 1) + 2(2x - 1)^2 - 2x - 4(2x - 1) - 1 = 0,$$

y simplificando

$$6x^2 - 16x + 5 = 0$$

cuyas raíces son $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{34}}{6}$.

Reemplazando estos valores en (2), tenemos $y = \dfrac{5 \pm 2\sqrt{34}}{3}$

Luego $\left(\dfrac{8 + \sqrt{34}}{6}, \dfrac{5 + 2\sqrt{34}}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{8 - \sqrt{34}}{6}, \dfrac{5 - 2\sqrt{34}}{3}\right)$

son los puntos de la curva en los que las tangentes son horizontales.

Puntos de contacto de las tangentes verticales.

Sea (x, y) un punto de la curva en el que la tangente es vertical. De acuerdo a (1) se debe cumplir

$$y' = \frac{2x - y - 1}{x - 2y + 2} = \infty,$$

o equivalentemente $\quad x-2y+2=0$

o $\quad x=2y-2$,

y sustituyendo x en la ecuación de la curva, obtenemos

$$2(2y-2)^2-2(2y-2)y+2y^2-2(2y-2)-4y-1=0\ ,$$

y simplificando $\quad 6y^2-20y+11=0,$

cuyas raíces son $\quad y=\dfrac{10\pm\sqrt{34}}{6}$

Reemplazando estos valores en (3), tenemos $\quad x=\dfrac{4\pm\sqrt{34}}{3}$.

Luego $\quad \left(\dfrac{4+\sqrt{34}}{3},\ \dfrac{10+\sqrt{34}}{6}\right)$ y $\left(\dfrac{4-\sqrt{34}}{3},\ \dfrac{10-\sqrt{34}}{6}\right)$

son los puntos de contacto de las tangentes verticales a la curva dada.

PROBLEMA 21. Determinar los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales de la curva $3y^2-6y-x=0$.

SOLUCION. Derivando la ecuación implícita respecto de x

$$6yy'-6y'-1=0,$$

de donde $\quad y'=\dfrac{1}{6y-6}$.

Puesto que $y'\neq 0$ concluimos que la curva *no tiene tangentes horizontales.*

Por otra parte, $y'=\dfrac{1}{6y-6}=\infty$ si y sólo si $6y-6=0$ o $y=1$ que sustituido en la ecuación de la curva da $x=-3$. Luego $(-3,1)$ es el único punto de la curva en donde la tangente es vertical.

PROBLEMA 22. Hallar los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales de la curva

$$x^2-24xy+169y^2=25.$$

SOLUCION. Derivando la ecuación implícita respecto de x

$$2x-24y-24xy'+2(169)yy'=0,$$

de donde $y' = \dfrac{x-12y}{12x-169y}$.

Si $y' = \dfrac{x-12y}{12x-169y} = 0$ entonces $x = 12y$, y sustituyendo en la ecuación de la curva

$$(12y)^2 - 24(12y)y + 169y^2 = 25$$

resulta $y = \pm 1$, y por lo tanto $x = \pm 12$.

Luego $(12,1)$ y $(-12,-1)$ *son los puntos de contacto de las tangentes horizontales.*

Si $y' = \dfrac{x-12y}{12x-169y} = \infty$, entonces $12x - 169y = 0$ y $x = \dfrac{169}{12}y$.

Sustituyendo en la ecuación de la curva $\dfrac{169^2}{12^2}y^2 - 24\left(\dfrac{169}{12}y\right)y + 169y^2 = 25$

se obtiene $y = \pm\dfrac{12}{13}$,

y por lo tanto $x = \pm 13$.

Luego $\left(13, \dfrac{12}{13}\right)$ y $\left(-13, -\dfrac{12}{13}\right)$

son los puntos de contacto de las tangentes verticales.

9.6.3 PROBLEMAS SOBRE DERIVACION DE ORDEN SUPERIOR.

PROBLEMA 23. Hallar la enésima derivada de la función $y = (ax+b)^n$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left|\frac{d}{dx}(ax+b)^n\right| = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left|n(ax+b)^{n-1}a\right|$$

$$= na\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(ax+b)^{n-1} = na(n-1)!\ a^{n-1} \quad \text{(por inducción sobre el exponente)}$$

$$= n!\ a^n.$$

PROBLEMA 24. Hallar la derivada de orden n de la función $y = \sqrt{x}$.

SOLUCION. Tenemos $y = x^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = (-1)^1 \frac{1}{2^2} x^{-3/2} ,$$

$$y''' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = (-1)^2 \frac{(1)(3)}{2^3} x^{-5/2} ,$$

y por inducción se obtiene $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-3)}{2^n} x^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$, $n \geq 2$

PROBLEMA 25. Hallar la enésima derivada de $y = \operatorname{sen} x$.

SOLUCION. Tenemos $y = y^{(0)} = \operatorname{sen} x$,

$$y^{(1)} = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y^{(2)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) .$$

Luego, por inducción sobre n se tiene $y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

PROBLEMA 26. Hallar la enésima derivada de $y = \cos ax$.

SOLUCION. Tenemos $y = y^{(0)} = \cos ax$,

$$y^{(1)} = -a \operatorname{sen} ax = a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y^{(2)} = -a^2 \operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

y por inducción sobre n se tiene $y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Nota. Regla de Leibniz. Sean $u = u(x)$, $v = v(x)$ dos funciones que tienen derivadas hasta de orden n inclusive. Entonces se prueba (por inducción sobre n, por ejemplo) que se cumple la fórmula de *Leibniz*

$$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + nu^{(n-1)}.v^{(1)} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot u^{(2)}\cdot v^{(n-2)} + nu^{(1)}\cdot v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)}.$$

PROBLEMA 27. Usando la regla de Leibniz encontrar $y^{(n)}$ si $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

SOLUCION. Sean $u = 1+x$, $v = x^{-1/2}$, de modo que $y = u.v$.

Aplicando

$$y^{(n)} = (u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + nu^{(n-1)}.v^{(1)} + \dots + nu^{(1)}.v^{(n-1)} + u.v^{(n)}$$

y teniendo en cuenta que

$$u^{(1)} = (1+x) = 1$$

$$u^{(2)} = 0 ,$$

$$\vdots$$

$$u^{(n)} = 0 .$$

obtenemos

$$y^{(n)} = n\left(x^{-1/2}\right)^{(n-1)} + (1+x)\left(x^{-1/2}\right)^{(n)} \tag{1}$$

Por otra parte

$$\left(x^{-1/2}\right)^{(1)} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$\left(x^{-1/2}\right)^{(2)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2}$$

$$= (-1)^2\,\frac{1.3}{2^2}\,x^{-5/2}$$

y se prueba que

$$\left(x^{-1/2}\right)^{(n)} = (-1)^n\,\frac{1\times 3\times \dots \times (2n-1)}{2^n}\,x^{-\frac{2n+1}{2}} \tag{2}$$

Luego (2) en (1) da

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,n\,\frac{1\times 3\times \dots \times (2n-3)}{2^{n-1}}\,x^{-\frac{2n-1}{2}} + (-1)^n\,(1+x)\frac{1\times 3\times \dots \times (2n-1)}{2^n}\,x^{-\frac{2n+1}{2}}$$

o $$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2^n}\,x^{\left(-\frac{2n+1}{2}\right)}\left[2nx-(2n-1)(1+x)\right]$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\ \ldots\ \times(2n-3)(x+1-2n)}{2^n x^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)}} .$$

PROBLEMA 28. Hallar $y^{(n)}$ si $y=\left(1-x^2\right)\cos x$.

SOLUCION. Aplicamos la fórmula de Leibniz

$$y^{(n)} = (u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + nu^{(n-1)}.v^{(1)} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}.u^{(2)}.v^{(n-2)} + nu^{(1)}.v^{(n-1)} + u.v^{(n)}$$

con $u=1-x^2$ y $v=\cos x$. Tenemos

$$\begin{array}{ll}
u=1-x^2\ , & v=\cos x\ ,\\
u^{(1)}=-2x\ , & v^{(1)}=-\operatorname{sen} x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),\\
u^{(2)}=-2\ , & v^{(2)}=-\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\dfrac{\pi}{2}\right),\\
u^{(3)}=0\ , & \\
\vdots & \\
u^{(n)}=0\ , & v^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).
\end{array}$$

Luego

$$y^{(n)} = \frac{n(n-1)}{2}(-2)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)+n(-2x)\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+\left(1-x^2\right)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y^{(n)} = \left(1-x^2\right)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

9.6.4 PROBLEMAS SOBRE RAZONES DE CAMBIO Y VELOCIDADES.

PROBLEMA 29. Un balón esférico está siendo inflado. Hallar la razón de cambio del área respecto al radio, en el instante en que el radio es 10 cms.

SOLUCION. Tenemos $S = 4\pi r^2$

donde $S =$ área de la superficie en cm^2,

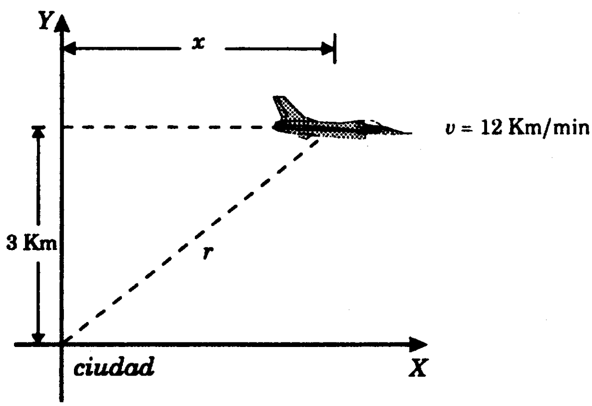
$r =$ radio del balón esférico en cms.

Por definición, la razón de cambio de S respecto de r es la derivada $\dfrac{dS}{dr} = 8\pi r$

Para $r = 10$ cms tenemos $\dfrac{dS}{dr} = 80\pi$ cms.

PROBLEMA 30. Un avión está volando paralelo al suelo a una altura de 3 mil metros y a una velocidad constante de 12 Km/min. Si el avión vuela directamente sobre una ciudad, ¿a que razón cambia la distancia de la línea de vuelo entre el avión y la ciudad 20 segundos después?

SOLUCION.



Sean Y = la recta vertical que pasa por la ciudad ,

x = distancia del avión a Y en Kms,

y r = distancia del avión a la ciudad en Kms.

Sabemos que $\dfrac{dx}{dt} = 12$ Kms/min y deseamos calcular $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $t = 20$ seg $= \dfrac{1}{3}$ min.

Del triángulo rectángulo de la figura tenemos

$$x^2 + 3^2 = r^2 \qquad (1)$$

y derivando ambos miembros de la ecuación respecto de t

$$2x\frac{dx}{dt}=2r\frac{dr}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{dr}{dt}=\frac{x}{r}.\frac{dx}{dt}=12\frac{x}{r} \tag{2}$$

Ahora bien, para $t=\frac{1}{3}$ min se tiene $x=12\left(\frac{1}{3}\right)=4$,

y $r=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (por (1)),

y sustituyendo en (2) $\quad \dfrac{dr}{dt} = 12\left(\dfrac{4}{5}\right) = 9.6$ Km/min.

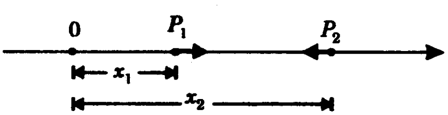
PROBLEMA 31. Dos puntos se mueven sobre el eje X con las siguientes leyes de movimiento

$$x=t+5\ ,\ x=\frac{500}{t}\ ,$$

donde $t\geq 0$, x y t son dados en centímetros y segundos, respectivamente. ¿Con qué velocidad se separan los puntos en el instante en que se encuentran?

SOLUCION.

Sean P_1 y P_2 los puntos de modo que



$$x_1=t+5$$

y $\quad x_2=\dfrac{500}{t} \quad$ (ver figura)

Calculamos el tiempo t en el que P_1 y P_2 se encuentran.

Igualando $x_1=x_2$, o sea $t+5=\dfrac{500}{t}$, resulta $t^2+5t-500=0$,

cuyas raíces son $\quad t=20,\ -25$.

Luego $t=20$seg.

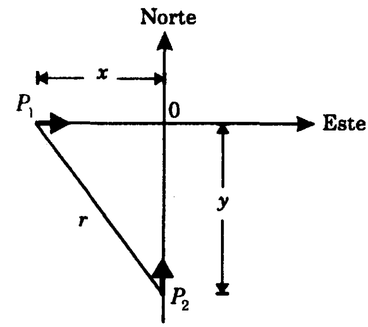
Las velocidades en el punto de encuentro son

$$v_1 = \left[\frac{dx_1}{dt}\right]_{t=20} = \left[\frac{d}{dt}(t+5)\right]_{t=20} = 1$$

y
$$v_2 = \left[\frac{dx_2}{dt}\right]_{t=20} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{500}{t}\right)\right]_{t=20} = \left[-\frac{500}{t^2}\right]_{t=20} = -\frac{500}{400} = -\frac{5}{4}$$

Luego la diferencia de velocidades es $\quad v_1-v_2 = 1-\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{4}$ (cm/seg).

PROBLEMA 32. Dos vehículos, uno se dirige hacia el Este a una velocidad de 26 Km/h y el otro hacia el Norte a una velocidad de 13 Km/h, están viajando hacia la intersección de dos carreteras. ¿Con qué velocidad se aproximan los dos vehículos uno con respecto del otro, en el instante en que el primero de ellos está a 5 Km y el segundo a 12 Km?



SOLUCION. Tracemos un sistema de ejes de coordenadas rectangulares como en la figura con origen 0, el punto de intersección de las dos carreteras.

Sean

$$\begin{cases} x = \text{la abscisa (de posición) de } P_1 \text{ en Kms.} \\ y = \text{la ordenada (de posición) de } P_2 \text{ en Kms.} \\ r = \text{la distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 \text{ en Kms.} \end{cases}$$

Sabemos que $$\frac{dx}{dt} = 26 \ , \quad \frac{dy}{dt} = 13 \qquad (1)$$

y deseamos calcular $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $x = -5$, $y = -12$.

(las coordenadas son negativas respecto del sistema elegido).

Del triángulo rectángulo se tiene que

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

y derivando ambos miembros respecto de t

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \ ,$$

o $$\frac{dr}{dt} = \frac{x}{r}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{r}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

Para $x = -5$, $y = -12$, la ecuación (2) nos da $r = 13$, y en (3), teniendo en cuenta (1),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-5}{13}(26) + \frac{-12}{13}(13) = -22 \ .$$

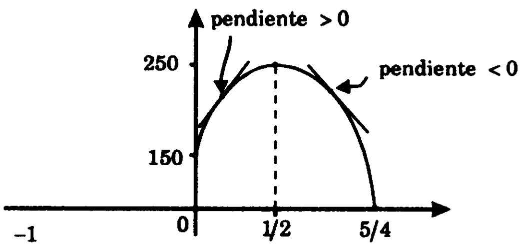
PROBLEMA 33. El volumen de ventas y de una tienda en función del gasto diario x de publicidad es dado por la fórmula $y = 50\left(-8x^2 + 8x + 3\right)$, donde x, y están expresados en miles de dólares.

1) Usando la derivada, determinar si sería ventajoso que el presupuesto diario de publicidad fuera aumentado, si actualmente éste es

   a) 300 dólares   b) 600 dólares.

2) ¿Cuánto debe asignarse al presupuesto de publicidad para conseguir el máximo volumen de ventas posibles?

SOLUCION. Completando cuadrados vemos que la curva $y = 50\left(-8x^2 + 8x + 3\right)$ representa la parábola $y = -400(x - 1/2)^2 + 250$ con foco en $(1/2, 250)$.



(1) De la gráfica vemos que una pendiente positiva significa un crecimiento en el volumen de ventas cuando x aumenta, y análogamente, una pendiente negativa significa un decrecimiento en el volumen de ventas cuando x aumenta.

Ahora bien, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{3}{10}} = 50(-16x + 8)\Big|_{x=\frac{3}{10}} = 160 > 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{6}{10}} = 50(-16x + 8)\Big|_{x=\frac{6}{10}} = -240 < 0$$

y por tanto, resulta ventajoso aumentar el presupuesto de publicidad cuando éste es de 300 dólares, pero no así cuando es de 600 dólares.

(2) Para determinar el valor máximo de y, basta observar que en la ecuación $y = -400(x - 1/2)^2 + 250$, el término $-400(x - 1/2)^2$ es siempre ≤ 0 y por lo tanto, y será máximo cuando este término sea 0, o sea cuando $(x - 1/2)^2 = 0$ o $x = 1/2$.

Luego, el máximo volumen de ventas se conseguirá con un presupuesto de publicidad de 500 dólares.

PROBLEMA 34. En un círcuito eléctrico la ley de Ohm establece que $E = I\,R$,

donde $\begin{cases} E & \text{voltios es la fuerza electromotriz,} \\ R & \text{ohmios es la resistencia,} \\ I & \text{amperios es la intensidad de la corriente.} \end{cases}$

Suponiendo que E es constante, probar que R decrece en una razón respecto de I que es proporcional al cuadrado del inverso de I.

SOLUCION. Despejando R se tiene $R = \dfrac{E}{I}$,

y derivando ambos miembros respecto de I : $\dfrac{dR}{dI} = -\dfrac{E}{I^2}$, teniendo presente que $\dfrac{dE}{dI} = 0$ ya que E =constante.

PROBLEMA 35. El lado de un triángulo equilátero mide a cms., y está creciendo a una razón de k cm/hora. ¿Con qué rapidez crece el área?

SOLUCION. Se tiene $A = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, donde A es el área del triángulo. Derivando respecto del tiempo y usando $\dfrac{dA}{dt} = k$ resulta

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ak\sqrt{3}\ \text{cm}^2/\text{hora}.$$

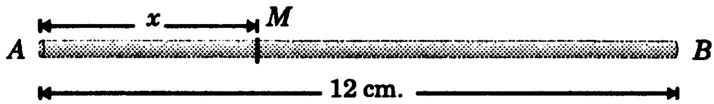
PROBLEMA 36. Una varilla no homogénea AB tiene 12 cm. de largo. Se sabe que la masa de la parte AM de la varilla aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia del punto M al extremo A, y es de 10 gr. cuando $\overline{AM} = 2\,\text{cm}$.

1) Hallar la masa de toda la varilla AB.

2) Hallar la densidad lineal en cualquier punto M.

3) Hallar la densidad lineal de la varilla en los extremos A y B.

SOLUCION.



Sea $m = m(x) = kx^2$ la masa en gramos de la parte AM de la varilla cuando $\overline{AM} = x$ cm., k es una constante de proporcionalidad.

Calculamos k. Se tiene $m = 10$ cuando $x = 2$,

y por tanto $10 = k(2)^2$ o sea $k = 5/2\ \text{gr}/\text{cm}^2$.

Se tiene pues $m = \frac{5}{2}x^2$

1) La masa de la varilla se obtiene cuando $x = 12$, y vale $m = \frac{5}{2}(12)^2 = 360\,\text{gr}$.

2) Por definición, la densidad lineal es $\dfrac{dm}{dx}$. Luego $\dfrac{dm}{dx} = 5x\ \text{gr}/\text{cm}$.

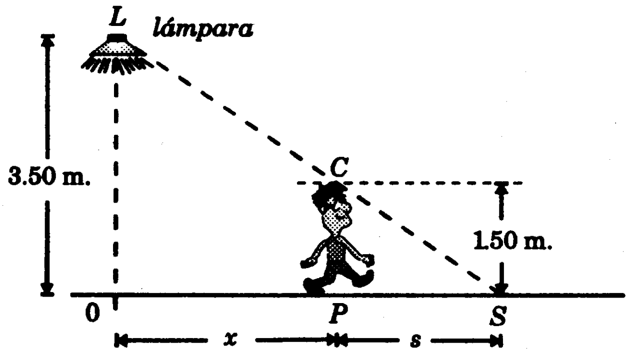
3) Haciendo $x = 0$ y $x = 12$ en la ecuación precedente resulta $\dfrac{dm}{dx} = 0$ y $\dfrac{dm}{dx} = 60$, respectivamente. Y éstas son las densidades lineales en los extremos.

PROBLEMA 37. Una lámpara está colgada a 3.50 mts. sobre una recta horizontal. Un hombre de 1.50 mts. de altura camina alejándose de la luz a razón de 24 mts/min.

(1) ¿Con qué rapidez se alarga su sombra?

(2) ¿Con que rapidez se mueve la punta de la sombra del hombre?

SOLUCION.



Sean x = la distancia en mts. del hombre a la recta vertical OL y

s = longitud en mts. de la sombra del hombre.

Entonces $x+s=$ distancia de la punta de la sombra al origen, y sabemos que $\frac{dx}{dt}=24$ mts/min.

Puesto que los triángulos rectángulos ΔLOS y ΔCPS son semejantes, se cumple $\frac{s}{x+s}=\frac{1.50}{3.50}=\frac{3}{7}$, de donde $s=\frac{3}{4}x$,

y también $x+s=\frac{7}{4}(x)$.

Luego tenemos que

$$\textit{rapidez con que crece la sombra} = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{4}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{3}{4}(24) = 18 \text{ m/min},$$

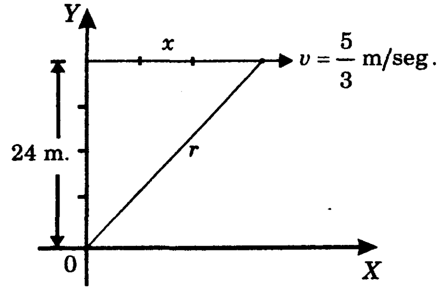
y $$\textit{rapidez con que se mueve el punto } S = \frac{d}{dt}(x+s) = \frac{7}{4}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{7}{4}(24) = 42 \text{ m/min}.$$

PROBLEMA 38. Un punto se mueve a lo largo de una hipérbola $y=\frac{10}{x}$, de manera que su abscisa x crece uniformemente a la razón de 1 unidad por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando el punto pasa por $(5, 2)$?

SOLUCION. Derivando ambos miembros de la ecuación respecto del tiempo en segundos

$\frac{dy}{dt}=-\frac{10}{x^2}\frac{dx}{dt}$ y para $x=5$, $\frac{dx}{dt}=1$, entonces tenemos $\frac{dy}{dt}=-\frac{10}{5^2}.1=-\frac{2}{5}$.

PROBLEMA 39. Una cometa que está a 24 mts. de altura sobre el nivel del suelo se aleja horizontalmente a una velocidad de 5/3 metros por segundo del niño que la sostiene. ¿A qué velocidad el niño está soltando la cuerda, cuando la cuerda mide 30 metros?



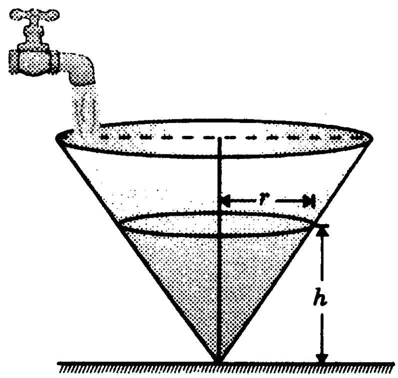
SOLUCION. Ubicamos al niño en el origen 0 del sistema de coordenadas cartesianas XY de la figura. Designamos con x la distancia de la cometa al eje Y, y r la longitud de la cuerda. Se cumple $r^2=24^2+x^2$.

Luego $r\dfrac{dr}{dt} = x\dfrac{dx}{dt}$ o $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{x}{r}\dfrac{dx}{dt}$. Tenemos $\dfrac{dx}{dt} = v = \dfrac{5}{3}$ m./seg , y cuando $r = 30$

entonces $x = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$.

Por tanto $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{18}{30} \cdot \dfrac{5}{3} = 1$.

PROBLEMA 40. Un caño vierte agua en un cono recto circular invertido a razón de $18\ \text{cm}^3/\text{seg}$. La altura del cono es 5/2 de su diámetro. ¿A qué rapidez sube el nivel del agua cuando tiene una profundidad de 12 cm. el cono?



SOLUCION. Sean

v = volumen del agua en cm^3 cuando el nivel está a h cm. de profundidad ,

y

r = radio en cm. de la superficie de agua a una altura de h cm.

Tenemos $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (1)

y $h = \frac{5}{2}$ *(diámetro)* (por hipótesis)

$= \frac{5}{2}(2r) = 5r$.

Luego $r = \dfrac{h}{5}$

y sustituyendo r en (1) resulta $v = \dfrac{\pi}{75}h^3$.

Derivando respecto de t ambos miembros se tiene $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\pi}{25}h^2\dfrac{dh}{dt} = 18\ \text{cm}^3/\text{seg}$.

Y haciendo $h = 12$ cm se obtiene $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{25}{8\pi}$ cm/seg.

PROBLEMA 41. Un barco está navegando hacia el Sur a una velocidad de 15 millas/hora . Otro lo hace hacia el Este a la velocidad de 10 millas/h. A las 4 p.m. el segundo barco pasó por el punto donde el primero había estado 2 horas antes.

(1) ¿Con qué rapidez cambiaba la distancia entre los barcos a la 1 p.m.?

(2) ¿Y a las 5 p.m.?

(3) ¿A qué hora no cambiaba la distancia entre ellos?

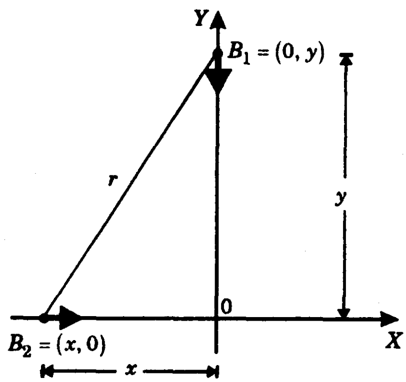
SOLUCION.

Tracemos un sistema de ejes rectangulares X e Y sobre las líneas de movimiento de los barcos B_1 y B_2, respectivamente. Tenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 ,$$

donde $r = d(B_1, B_2)$, $\dfrac{dx}{dt} = 10$, $\dfrac{dy}{dt} = -15$

(pues B_1 se desplaza en sentido opuesto al sentido positivo del eje Y).



Luego $\qquad \dfrac{dr}{dt} = 10\dfrac{x}{r} - 15\dfrac{y}{r} \qquad$ (*)

De acuerdo al enunciado, a las 4 p.m. el segundo barco se encuentra en el origen (0, 0); y el primero, que había pasado dos horas antes, se encuentra a $15(2) = 30$ millas al sur del origen, o sea en el punto $(0, -30)$.

Se sigue entonces que las ecuaciones de movimiento B_2 y B_1 son

$$x = 10(t-4) , \qquad y = -15(t-4) - 30 = -15t + 30 \qquad (**)$$

respectivamente.

Distancia entre los barcos a la 1 p.m.

Para $t = 1$ tenemos sustituyendo en (**)

$$x = -30 , \qquad y = 15 , \qquad r = 15\sqrt{5}$$

y luego en (*) $\qquad \dfrac{dr}{dt} = -7\sqrt{5} = -15.85$ millas por hora.

Distancia entre los barcos a las 5 p.m.

Para $t = 5$ tenemos sustituyendo en (**)

$$x = 10 , \qquad y = -45 , \qquad r = 5\sqrt{85}$$

y luego en (*) $\qquad \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{132\sqrt{85}}{17} = 75.38$ millas por hora.

Cálculo de la hora cuando no cambiaba la distancia entre los barcos,

o sea cuando $\dfrac{dr}{dt} = 0$.

De (*) y (**) tenemos $0 = 2x - 3y$

$$0 = 20(t-4) - 3(-15t + 30)$$

y $t = \frac{34}{13}$ horas $= 2$h. 37min.

PROBLEMA 42. En un cierto instante las tres dimensiones de un paralelepípedo rectangular son 6, 8, 10 cms, y están creciendo en las razones de 0.2, 0.3 y 0.1 cm/seg, respectivamente. ¿Con qué rapidez está creciendo el volumen?

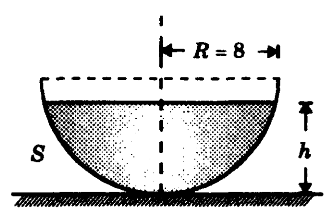
SOLUCION. Sean x, y, z las longitudes de los lados del paralelepípedo en cuestión. Luego su volumen es

$$V = xyz \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt}.$$

Para $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$, $\dfrac{dx}{dt} = 0.2$, $\dfrac{dy}{dt} = 0.3$, $\dfrac{dz}{dt} = 0.1$,

resulta $\dfrac{dV}{dt} = 38.8$ cm/seg.

PROBLEMA 43. Un grifo vierte agua en un depósito hemisférico de diámetro de 16 cm. a la razón de $12\ \text{cm}^3/\text{seg}$. Hallar la rapidez con que se eleva la superficie del agua



(1) Cuando el nivel del agua alcanza la mitad de la altura del depósito.

(2) Cuando el agua empieza a derramarse.

Nota. El volumen de un segmento esférico S es

$$S = \pi R h^2 - \tfrac{1}{3}\pi h^3 \qquad (1)$$

donde h es la altura del segmento.

SOLUCION. Derivando ambos miembros de la ecuación (1) respecto del tiempo t

$$\frac{dS}{dt} = \left(2\pi R h - \pi h^2\right)\frac{dh}{dt} = \pi h(16-h)\frac{dh}{dt}, \quad \text{puesto que} \quad 2R = 16;$$

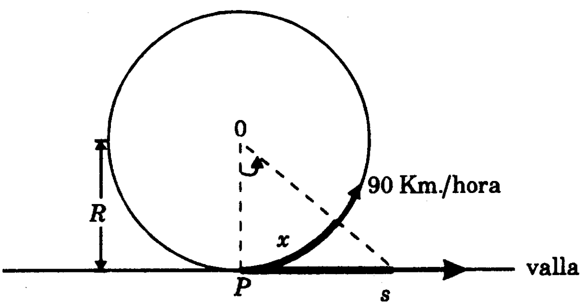
y $\quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{12}{\pi h(16-h)}$, puesto que $\dfrac{dS}{dt} = 12\ \text{cm}^3/\text{seg}$.

(1) Para $h = \dfrac{R}{2} = 4$ se obtiene $\quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{4\pi} = 0.08\ \text{cm/seg}$.

(2) Para $h = R = 8$ se obtiene $\quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{3}{16\pi} = 0.06\ \text{cm/seg}$.

PROBLEMA 44. Un automóvil viaja a una velocidad constante de 90 Km/h sobre una pista circular en cuyo centro 0 hay una fuente de luz. ¿A qué velocidad se mueve la sombra del automóvil sobre una valla tangente a la pista en un punto P, cuando ha recorrido 1/6 de la pista desde P ?

SOLUCION.



Sean R = radio de la pista circular,

x = longitud del recorrido del automóvil respecto del punto P, en un tiempo t,

y $\quad s$ = distancia de la sombra del automóvil al punto P, en un tiempo t.

Se tiene $\quad s = R\,\text{tg}\,(\measuredangle POS) = R\,\text{tg}\left(\dfrac{x}{R}\right)$.

Derivando respecto de t

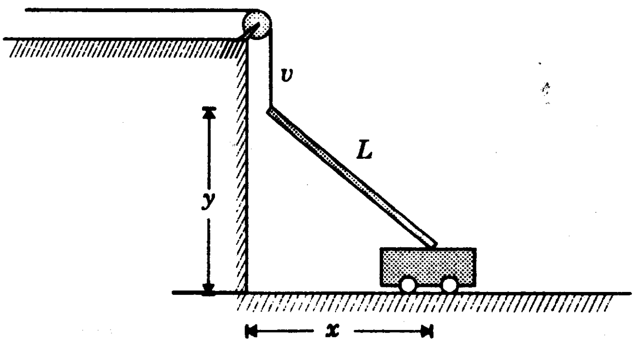
$$\frac{ds}{dt} = R\,.\sec^2\left(\frac{x}{R}\right)\cdot\frac{1}{R}\frac{dx}{dt} = 90\sec^2\left(\frac{x}{R}\right),$$

pues $\dfrac{dx}{dt} = 90$.

Cuando $\quad x = \dfrac{1}{6}$ de la longitud de la pista $= \dfrac{1}{6}(2\pi R) = \dfrac{2}{3}\pi R$, se tiene $\dfrac{x}{R} = \dfrac{2\pi}{3}$ y por tanto

$$\frac{ds}{dt} = 90\sec^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 360 \text{ Km/h}.$$

PROBLEMA 45. Una viga de longitud L con su extremo superior atado a una polea se apoya en una pared y su extremo inferior descansa sobre un carro. Hallar la aceleración del carro cuando está a x unidades de la pared, si se suelta la soga a una razón constante de v unidades por segundo.



SOLUCION. De la figura tenemos

$$L^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

y $\qquad \dfrac{dy}{dt} = -v \qquad$ (suponemos y orientado hacia arriba)

Derivando (1) respecto de t

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{vy}{x}.$$

Luego $\qquad$ *aceleración* $= \dfrac{d^2x}{dt^2} = v \cdot \dfrac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2} = v\dfrac{x(-v) - y \cdot \dfrac{vy}{x}}{x^2}$

$$= \frac{-v^2\left(x^2 + y^2\right)}{x^3} = \frac{-v^2 L^2}{x^3} \qquad (0 \le x \le L)$$

PROBLEMA 46. Un tanque cilíndrico vertical de 20 cm. de diámetro tiene un orificio en su base. La velocidad con la cual el agua sale del tanque es dada por la fórmula $v^2 = 2gh$, donde h es la profundidad del agua y g es la aceleración de la gravedad. ¿Con qué rapidez cambia la velocidad v del agua que sale, si el orificio tiene 1 cm^2 de área?

SOLUCION. Tenemos $V = \pi(10)^2 h$ y $\dfrac{dV}{dt} = v \,.\, 1$,

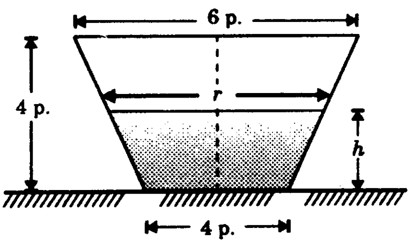
donde V es el volumen de agua a una altura h.

Luego
$$v = \frac{dV}{dt} = 100\pi \frac{dh}{dt} \qquad (1)$$

y de $v^2 = 2gh$ se tiene
$$v\frac{dv}{dt} = g\frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

Eliminando $\dfrac{dh}{dt}$ de (1) y (2) resulta $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{g}{100\pi}\, \text{cm/seg}^2$.

PROBLEMA 47. Un abrevadero horizontal tiene 16 p de largo y sus extremos son trapezoides con una altura de 4 p, base menor de 4 p, y base mayor de 6 p. Se vierte agua en el abrevadero a razón de 8 p/min. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando el agua tiene 2 p de profundidad?



SOLUCION.

El volumen de agua a una altura h es

$$V = 16 \times \textit{área del trapecio} = 16 \times \frac{(4+r)}{2} \times h = 8(4+r)h \qquad (1)$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos

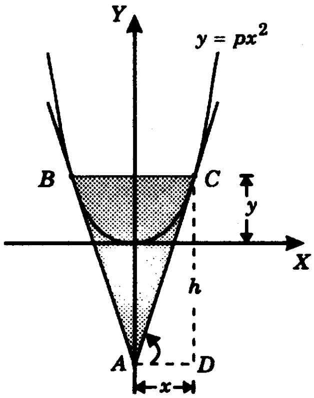
$$\frac{h}{r-4} = \frac{4}{6-4} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{h}{2} + 4 \qquad (2)$$

Remplazando (2) en (1) resulta $V = 4(h+16)h$.

Derivando respecto del tiempo t: $\dfrac{dV}{dt} = (8h+64)\dfrac{dh}{dt}$.

Puesto que $\dfrac{dV}{dt} = 8$, para $h = 2$ obtenemos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{10} = 0.1(\text{p/seg})$.

PROBLEMA 48. Un triángulo ABC está formado por la cuerda BC de la parábola $y = px^2$ y las tangentes AB y AC en cada extremo de la cuerda. Si BC es perpendicular al eje de la parábola y se acerca al vértice a una razón de 2 unidades por segundo, ¿con qué rapidez el área del triángulo cambia cuando la cuerda BC se encuentra a 4 unidades del vértice?



SOLUCION. En primer lugar, debemos expresar el área S del triángulo en función de la ordenada y, para lo cual necesitamos conocer la altura h.

En el punto $C = (x, y)$ la tangente AC tiene pendiente $\dfrac{dy}{dx} = 2px$.

Luego $$h = x \,.\, \text{tg}\,(\measuredangle CAD) = x(2px) = 2px^2,$$

$$S = \frac{1}{2}(2x)h = x\left(2px^2\right) = 2px^3,$$

y sustituyendo $x = \left(\dfrac{y}{p}\right)^{1/2}$ resulta $S = \dfrac{2}{p^{1/2}}\, y^{3/2}$.

Derivando respecto de t: $$\frac{dS}{dt} = \frac{3}{p^{1/2}}\, y^{1/2}\, \frac{dy}{dt},$$

y como $\dfrac{dy}{dt} = 2$, para $y = 4$ obtenemos $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{12}{p^{1/2}}$ unidades^2/seg.

9.7 PROBLEMAS PROPUESTOS.

PROBLEMA 1. Un punto se mueve a lo largo de la parábola $y^2 = 12x$, de manera que su abscisa crece uniformemente a una razón de 2cm./seg. ¿En qué punto de la parábola la abscisa y la ordenada crecen a la misma razón?

PROBLEMA 2. El radio de la base de un cono está creciendo a una razón de 3 cm./min., y la altura está decreciendo a una razón de 4 cm./min. ¿Con qué rapidez cambia el área de la superficie del cono, cuando el radio es 5 cm. y la altura 12 cm?

Nota. Area lateral $= \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

PROBLEMA 3. Si r designa el radio de una esfera, S la superficie y V el volumen, probar que se cumple $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{r}{2} \cdot \dfrac{dS}{dt}$.

PROBLEMA 4. Un punto P se mueve a lo largo de la parárbola $y^2 = x$ de manera que su abscisa crece a una razón constante de 4 unidades/seg. Si la proyección de P sobre el eje X es M. ¿Con qué rapidez el área del triángulo OMP está cambiando cuando P tiene su abscisa en $x = 25$?

PROBLEMA 5. Un recipiente tiene 12 p de largo y sus extremos son triángulos invertidos que miden 3 p de altura y 3 p de base. Se vierte agua en el recipiente a razón de 2 p^3/min. ¿Con qué rapidez aumenta el nivel del agua, cuando el agua tiene 1 p. de profundidad?

PROBLEMA 6. Un hombre en un muelle mueve un bote a razón de 48 p/min, por medio de una soga atada al bote al nivel del agua. Si las manos del hombre están a 16 p. sobre el nivel del agua, ¿Con qué rapidez se acerca el bote al muelle cuando la longitud de soga suelta es de 20 p.?

RESPUESTAS.

1. $(3, 6)$.	**2.** Crece a una razón de $\frac{342}{13}\pi\ cm^2/min$.	
4. $15\ u^2/seg$:	**5.** $\frac{1}{6}$ p/min.	**6.** 80 p/min.

9.8 DIFERENCIALES.

9.8.1 DEFINICION

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el punto x. *La diferencial de* y (en el punto x, y para un incremento Δx) es dada por

$$dy = f'(x)\ \Delta x$$

donde Δx es un incremento arbitrario de x.

9.8.2 OBSERVACIONES.

1) También se suele escribir $dy = df$, $dy = \dfrac{dy}{dx} . dx$.

2) La diferencial df es una función de las dos variables x y Δx, donde x es cualquier punto donde existe $f'(x)$ y Δx es un número real arbitrario. Así, con propiedad debería escribirse

$$df = df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x .$$

9.8.3 PROPIEDAD DE APROXIMACION DE LA DIFERENCIAL.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el punto x. Entonces para un incremento pequeño Δx, *la diferencial* $dy = f'(x)\Delta x$ *se aproxima al incremento* $y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Es decir que se cumple

$$\Delta y \approx dy \qquad (1)$$

y en particular

$$y + \Delta y \approx y + dy \quad \text{o} \quad y + \Delta y \approx y + f'(x)\Delta x \ , \quad (\Delta x \text{ es muy pequeño}) \qquad (2)$$

La fórmula (2) es muy útil para calcular valores aproximados de $y + \Delta y$.

Nota. La fórmula (1) resulta de la definición de la derivada $f'(x)$.

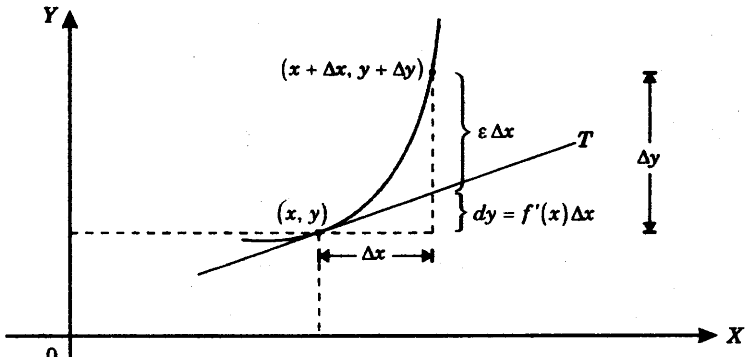
En efecto, si llamamos $$\varepsilon = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \qquad (3)$$

entonces $$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0 \qquad (4)$$

ya que $$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - f'(x) = 0.$$

Ahora bien, la ecuación (3) puede escribirse $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$, y teniendo en cuenta (4), si Δx se aproxima a cero, $\varepsilon\,\Delta x$ es comparativamente más pequeño que Δx y se tiene $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

La siguiente figura ilustra la propiedad de aproximación de la diferencial



T = tangente en el punto (x, y)

El número $\varepsilon\,\Delta x$ es muy pequeño en comparación con Δx, cuando Δx se aproxima a cero, y de $\Delta y = dy + \varepsilon\,\Delta x$ tenemos que $\Delta y \approx dy$.

9.8.4 LA DIFERENCIAL dx.

(1) Para la función $I(x) = x$ la diferencial es, de acuerdo a la definición 9.8.1,

$$dx = \frac{d}{dx}(x)\,.\,\Delta x = 1\,.\,\Delta x$$

$$dx = \Delta x,$$

donde Δx es un incremento arbitrario de x.

(2) Si $y = f(x)$ es una función diferenciable en el punto x, entonces df se expresa como un múltiplo de la diferencial dx. En efecto,

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx \qquad \text{(pues } dx = \Delta x \text{ por (1))}$$

$$dy = f'(x)dx \quad \text{o} \quad dy = \frac{dy}{dx}dx.$$

(3) Observemos que tenemos $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ (en la notación de derivada)

si y sólo si $dy = f'(x)dx$ (en la notación de diferenciales).

9.8.5 PROPIEDADES DE LAS DIFERENCIALES.

Teorema. Se cumplen las siguientes propiedades

1. Si c es una constante, entonces $dc = 0$

2. Si u y v son dos funciones y c es una constante, entonces

$$d(u + v) = du + dv \qquad d(cu) = cdu$$

$$d(u\,.\,v) = udv + vdu \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

3. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.

4. $d(u^n) = nu^{n-1}du$.

5. *Diferencial de una función compuesta.* Si $u = u(v)$ y $v = v(x)$ son dos funciones, entonces $d\big(u(v(x))\big) = \dfrac{du}{dv}(v(x))\,dv(x)$, o en forma breve $du = \dfrac{du}{dv}dv$, donde u es considerada como una función de x: $u = u(v(x))$.

Prueba de la propiedad 5.

Se tiene $u = u(v(x))$ y $v = v(x)$.

Luego por definición de diferencial se cumple

$$du = \frac{d}{dx}\left[u(v(x))\right]dx \qquad \textbf{(a)}$$

$$dv = \frac{d}{dx}v(x)\,dx \qquad \textbf{(b)}$$

Pero por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left[u(v(x))\right] = \frac{du}{dv}(v(x))\cdot\frac{dv}{dx}(x) \qquad \textbf{(c)}$$

y por tanto en (a) $\quad du = \dfrac{du}{dv}(v(x))\cdot\dfrac{dv}{dx}(x)dx = \dfrac{du}{dv}(v(x)).\,dv \quad$ (usando (b)),

que es lo que queríamos demostrar.

9.8.6 DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES.

La diferencial de *orden n-ésimo* de la función $y = f(x)$ se define por

$$d^n y = f^{(n)}(x).(\Delta x)^n \ ,$$

donde Δx es un incremento arbitrario de x.

Puesto que $dx = \Delta x$, se cumple $d^n y = f^{(n)}(x).(dx)^n$

9.9 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Hallar la diferencial de $y = 2x^{-3/2}$ para $x = 4$ y $\Delta x = -0.008$.

SOLUCION. $\quad dy = \left(2x^{-3/2}\right)' dx = -3x^{-5/2}dx.$

Luego para $x = 4$ y $dx = \Delta x = -0.01$, se tiene

$$dy = -3(4)^{-5/2}(-0.008) = \frac{3(0.008)}{32} = 0.00075 \ .$$

PROBLEMA 2. ¿Tiene la función $y = |x|$ una diferencial en $x = 0$?

SOLUCION. No, pues no existe $y'(x)$ cuando $x = 0$.

PROBLEMA 3. Hallar dy si $x^3 + 2xy - 4y^2 = a^2$.

SOLUCION. Aplicando las propiedades de la diferencial tenemos

$$d\left(x^3\right)dx + d(2xy) + d\left(-4y^2\right) = d\left(a^2\right)$$

$$3x^2 dx + 2x\,dy + 2y\,dx - 8y\,dy = 0 \quad ,$$

de donde despejando dy resulta $\quad dy = \dfrac{-3x\,dx - 2y\,dx}{2x - 8y} = \dfrac{3x + 2y}{8y - 2x} \cdot dx$.

PROBLEMA 4. Hallar la diferencial de la función $y = \cos x$ para $x = \dfrac{\pi}{6}$ y $\Delta x = \dfrac{\pi}{36}$.

SOLUCION. Debemos calcular $\quad dy = (\cos x)'\,dx = -\operatorname{sen} x\,dx \quad$ para $x = \dfrac{\pi}{6}$ y $dx = \Delta x = \dfrac{\pi}{6}$. Sustituyendo estos valores obtenemos

$$dy = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12} \ .$$

PROBLEMA 5. Hallar un valor aproximado de $\sqrt[5]{31}$ sin usar tablas.

SOLUCION. Sea $y = \sqrt[5]{x}$.

Debemos hallar un valor aproximado de $y + \Delta y = \sqrt[5]{x + \Delta x}$, cuando $x + \Delta x = 31$. Sabemos que

$$y + \Delta y \approx y + y'\Delta x \ . \tag{1}$$

Tomando $x = 32$ (para lo cual $y = \sqrt[5]{32} = 2$) y $\Delta x = -1$, tenemos $x + \Delta x = 31$, y debemos hallar y' en $x = 32$.

$$y'\Big|_{x=32} = \left(x^{1/5}\right)'\Big|_{x=32} = \frac{x^{-4/5}}{5}\Bigg|_{x=32} = \frac{(32)^{-4/5}}{5} = 0.0125$$

Luego en (1) $\quad \sqrt[5]{31} = y + \Delta y \approx 2 + (0.0125)(-1) = 1.9875$.

PROBLEMA 6. Reemplazando el incremento de la función por la diferencial, calcular aproximadamente

(1) $\operatorname{tg} 44^\circ$ (2) $\cos 61^\circ$.

SOLUCION. Sea $y = \operatorname{tg} x$, donde x es el arco medido en radianes.

Tenemos
$$x = \text{arco de } 45^\circ = \frac{45^\circ}{360^\circ}(2\pi) = \frac{\pi}{4} ,$$
$$\Delta x = -\text{arco de } 1^\circ = -\frac{1^\circ}{360^\circ}(2\pi) = -\frac{\pi}{180} .$$

Calculando $dy = \sec^2(x)\,dx$ para estos valores resulta
$$dy = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(-\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{\pi}{90} \approx -0.017$$

Luego $\operatorname{tg} 44^\circ \approx \operatorname{tg} 45^\circ + dy = 1 - 0.017 = 0.983$.

Sea $y = \cos x$, donde x es el arco medido en radianes.

Tenemos
$$x = \frac{60}{360}(2\pi) = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{1}{360}(2\pi) = \frac{\pi}{180} .$$

Calculando $dy = -\operatorname{sen} x\, dx$ para estos valores
$$dy = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{\sqrt{3}\,\pi}{360} = -0.015$$

Luego $\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ + dy = \frac{1}{2} - 0.015 = 0.485$.

PROBLEMA 7. Encontrar la diferencial de la función y dada implícitamente por
$$(x+y)^2\,(2x+y)^3 = 1 .$$

SOLUCION. Tenemos
$$(x+y)^2 . d\left[(2x+y)^3\right] + (2x+y)^3 . d\left[(x+y)^2\right] = d(1)$$
$$(x+y)^2 . \left[3(2x+y)^2 . (2dx+dy)\right] + (2x+y)^3 . \left[2(x+y) . (dx+dy)\right] = 0 ,$$

de donde despejando dy resulta $\qquad dy = -\dfrac{10x+8y}{7x+5y}\,dx$

PROBLEMA 8. Si $y=\sqrt{1-x^2}$ hallar d^2y.

SOLUCION. Tenemos

$$y^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x) = -x\left(1-x^2\right)^{-1/2}$$

$$y^{(2)} = -\left(1-x^2\right)^{-1/2} + \frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2}(-2x) = -\frac{-\left(1-x^2\right)-x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\ .$$

Luego $\qquad d^2y = y^{(2)}(dx)^2 = -\dfrac{(dx)^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\ .$

PROBLEMA 9. Si $y=\cos(ax)$ hallar $d^n y$.

SOLUCION. Se tiene $\qquad y^{(n)} = a^n\cos\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right) \qquad$ (por el prob.26, sec. 6.10.3).

Luego $\qquad d^{(n)}y = a^n\cos\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)(dx)^n.$

PROBLEMA 10. Aproximar la función $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ para $x=0.1$.

SOLUCION. Se tiene $y = (1-x)^{1/3}(1+x)^{-1/3}$. Luego

$$y^{(1)} = (1-x)^{1/3}\left(-\frac{1}{3}\right)(1+x)^{-4/3} + (1+x)^{-1/3}\,\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(-1)$$

$$= \frac{-(1-x)-(1+x)}{3(1-x)^{2/3}(1+x)^{4/3}} = -\frac{2}{3(1-x)^{2/3}(1+x)^{4/3}}\ .$$

Luego $dy = y^{(1)}dx$ para $x=0$ y $\Delta x = 0.1$, vale

$$dy = -\frac{2}{3}(0.1) \approx -0.067$$

$$y(0.1) \approx y(0)+dy = 1-0.067 = 0.923 \ .$$

PROBLEMA 11.

(1) Derivar la fórmula de aproximación

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

para valores $|\Delta x|$ pequeños en comparación con x.

(2) Aplicando la fórmula aproximar los valores $\sqrt{640}$, $\sqrt[3]{200}$.

SOLUCION.

(1) Sea $y=\sqrt[n]{x}$. Puesto que $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$,

se tiene $dy = y'dx = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx$, y por tanto

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} = y+\Delta y \approx \sqrt[n]{x}+dy = \sqrt[n]{x} + \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\Delta x \ ,$$

esto es $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

(2) Para calcular aproximadamente $\sqrt{640}$ empleamos la fórmula que hemos establecido en (1), tomando $n=2$, $x=625$, $\Delta x = 15$:

$$\sqrt{640} \approx \sqrt{625} + \frac{15}{2\sqrt{625}} = 25+\frac{15}{50} \ .$$

Luego $\sqrt{640} \approx 25.30$.
En forma análoga, para calcular aproximadamente $\sqrt[3]{200}$ empleamos la fórmula de (1) con $n=3$, $x=216$, $\Delta x = -16$:

$$\sqrt[3]{200} \approx \sqrt[3]{216} + \frac{-16}{3\sqrt[3]{(216)^2}} \approx 6-0.15 \ .$$

Luego $\sqrt[3]{200} \approx 5.85$.

PROBLEMA 12. Hallar el volumen aproximado de un recipiente esférico, cuyo radio exterior es de 3 cm. y su espesor 1/4 cm.

SOLUCION. Tenemos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $dV = 4\pi r^2 dr$.

Para $r = 3$, $dr = -\frac{1}{4}$ resulta $V = \dfrac{4}{3}\pi (3)^3 = 36\pi$, $dV = 4\pi (3)^2 \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -9\pi$.

Luego $\textit{volumen aproximado} = V + dV = 36\pi - 9\pi = 27\pi \text{ cm}^3$.

PROBLEMA 13. Para una variable u se definen los siguientes conceptos:

$$\textit{error de } u = du ,$$

$$\textit{error relativo} = \frac{du}{u} ,$$

y $$\textit{error relativo en tanto por ciento} = 100\frac{du}{u}\% .$$

Probar que si se comete un error al medir el diámetro de una esfera, el error relativo de la superficie de la esfera es dos veces el error relativo del radio.

SOLUCION. Se tiene $S = 4\pi r^2$

Luego $dS = 8\pi r\, dr$ y $\dfrac{dS}{S} = 2\dfrac{dr}{r}$.

PROBLEMA 14. ¿Con qué precisión debe medirse la arista de un cubo para que el volumen resulte con un error menor del uno por ciento?

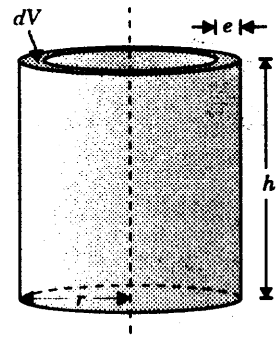
SOLUCION. Tenemos $V = a^3$, V =volumen , a =longitud de la arista ,

$$dV = 3a^2 da \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{V} = 3\frac{da}{a} .$$

Luego $$\left|3\frac{da}{a}\right| = \left|\frac{dV}{V}\right| < \frac{1}{100} , \qquad \left|\frac{da}{a}\right| < \frac{1}{300} ,$$

y por tanto, la arista del cubo debe medirse con un error menor del $\dfrac{1}{3}\%$.

PROBLEMA 15. Demostrar que $2\pi rhe$ es una fórmula aproximada para calcular el volumen de un tubo cilíndrico delgado de extremos abiertos, de radio r, altura h, espesor e.



SOLUCION. Si el volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h \ ,$$

entonces el volumen del tubo cilíndrico de espesor $e = dr$ se aproxima por

$$dV = 2\pi rh \, dr = 2\pi rhe \ ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 16. Hallar dy en cada uno de los siguientes ejercicios

(1) $x^2 + y^2 = a^2$ **(2)** $\operatorname{sen}(x - y) = \cos(x + y)$

(3) $x + 2\sqrt{xy} - y^2 = b$.

SOLUCION.

(1) $2x\,dx + 2y\,dy = 0$. Luego $dy = -\dfrac{x}{y}dx$.

(2) $\cos(x - y).(dx - dy) = -\operatorname{sen}(x + y).(dx + dy)$.

Luego $$dy = \frac{\cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)}\,dx .$$

(3) $dx + \sqrt{\dfrac{y}{x}}\,dx + \sqrt{\dfrac{x}{y}}\,dy - 2y\,dy = 0$.

Luego $$dy = \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\sqrt{y}}{\left(2y\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)\sqrt{x}}\,dx \ .$$

PROBLEMA 17. ¿Cuál es el incremento aproximado en el volumen de una esfera, si su radio de 20 cm. aumenta en 2 mm?

SOLUCION. Tenemos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y por lo tanto

$$\text{incremento aproximado de volumen} = dV = 4\pi r^2 dr$$

Para $r = 20\text{cm.}$ y $dr = \dfrac{2}{10} = 0.2$ cm., resulta

$$dV = 4\pi(20)^2(0.2) = 320\pi\,\text{cm}^3.$$

PROBLEMA 18. Hallar un valor aproximado de $\text{tg}\, 45^\circ\, 3'20''$.

SOLUCION. Sea $y = \text{tg}\, x$, x medido en radianes,

Tomando $$x = \textit{arco de } 45^\circ = \frac{45}{360}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta x = \textit{arco de } 3'20'' = \frac{\pi}{3240}.$$

Luego $$\text{tg}\, 45^\circ\, 3'20'' \approx \text{tg}\, 45^\circ + dy = \text{tg}\, 45^\circ + \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right).\frac{\pi}{3240}$$

$$= 1 + \frac{\pi}{1620} \approx 1 + 0.0019 = 1.0019\,.$$

PROBLEMA 19. La altura de un cono recto circular es el doble del radio de la base. Al medir se encontró que la altura es de 24 cm. con un posible error de 0.01 cm. Encontrar el error aproximado en el volumen calculado del cono.

SOLUCION. El volumen calculado del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base en cm. y h es la altura.

Puesto que $h = 2r$ reemplazando r se tiene

$$V = \tfrac{1}{12}\pi h^3 \qquad \text{y} \qquad dV = \tfrac{1}{4}\pi h^2 dh.$$

Para $h = 24$, $dh = 0.01$, resulta $dV = \frac{1}{4}\pi(24)^2(0.01) = 4.52\,\text{cm}^3$.

PROBLEMA 20. El tiempo de oscilación de un péndulo se da por la fórmula

$$t^2 = \frac{\pi^2 L}{g},$$

donde L es la longitud del péndulo en metros, t el tiempo en segundos y $g = 9.8\ \text{m/seg}^2$.

(1) ¿Cuál es la longitud de un péndulo que oscila una vez por segundo?

(2) ¿En cuánto se altera t si el péndulo de (1) se alarga 3 mm?¿Cuánto se adelantaría o atrasaría en un día un reloj con ese error?

SOLUCION.

(1) Tenemos $L = \dfrac{g\,t^2}{\pi^2}$ y sustituyendo $t = 1\text{seg.}$, $g = 9.8$, $\pi = 3.14$, resulta

$$L = \frac{(9.8)(1)^2}{(3.14)^2} = 0.99\text{m.}$$

(2) $2t\,dt = \dfrac{\pi^2}{g}dL$, $dt = \dfrac{\pi^2}{2gt}dL$.

Luego para $dL = 0.003\,\text{m.}$, $t = 1\text{seg.}$, tenemos que el cambio es

$$dt = \frac{(3.14)^2(0.003)}{2(9.8)(1)} = 0.0015\,\text{seg. por oscilación.}$$

Si se alarga L en 3 mm, el tiempo t de oscilación aumenta a 1.0015 seg.

En un día el oscilador ejecutará $\dfrac{86{,}400}{1.0015} \approx 86{,}270$ oscilaciones, y por lo tanto, el reloj se atrasará en $86{,}400 - 86{,}270 = 130'' = 2'\,10''$.

PROBLEMA 21. Usando diferenciales probar que

$$\frac{1}{x+\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2} \qquad \text{(aproximadamente).}$$

SOLUCION. Sea $y = \dfrac{1}{x}$. Tenemos $\dfrac{1}{x+\Delta x} \approx \dfrac{1}{x} + dy$ (1)

y $$dy = \left(\frac{1}{x}\right)'\Delta x = -\frac{\Delta x}{x^2}. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que $$\frac{1}{x+\Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2}.$$

PROBLEMA 22. Si $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = 3x - 1$, ¿Para qué valores de x se cumple $df = dg$?

SOLUCION. Tenemos
$$df = f'(x)\,dx = 3x^2 dx\,,$$
$$dg = g'(x)\,dx = 3\,dx\,.$$

Luego $df(x) = dg(x)$ si y sólo si $3x^2 = 3$ o $x = \pm 1$.

PROBLEMA 23. Si $d\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = h(x)\,dx$ hallar $h(2)$.

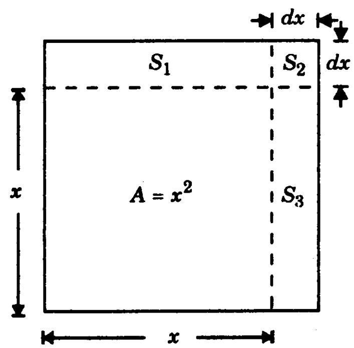
SOLUCION.

Tenemos $$d\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' dx\,.$$

Luego $$h(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)(2x) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

y $$h(2) = 0\,.$$

PROBLEMA 24. Si A es el área de un cuadrado cuyo lado tiene longitud x, hallar dA. Trazar una figura mostrando el cuadrado, dA y ΔA.



SOLUCION.

De $A = x^2$ se sigue que $dA = 2x\,dx$,

dA se compone de la suma de S_1 y S_3,

ΔA se compone de la suma de S_1, S_2 y S_3,

$$S_1 = x\,dx\,,\quad S_2 = (dx)^2\,,\quad S_3 = x\,dx\,.$$

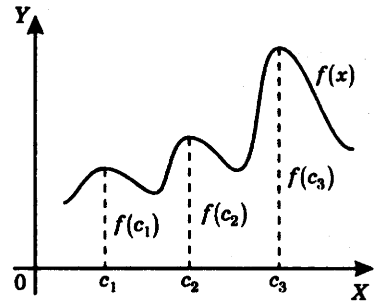
9.10 VALORES MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION.

9.10.1 DEFINICION.

(1) Decimos que una función $f(x)$ tiene un *valor máximo absoluto en el punto* c si se cumple $$f(x) \le f(c)\,,$$
para todo x donde $f(x)$ está definida.

(2) Decimos que una función $f(x)$ tiene un *valor máximo relativo en el punto c,* si existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x tal que $|x - c| < \delta$.

O equivalentemente, si $f(x)$ tiene un máximo absoluto en c *sobre el intervalo abierto* $(c - \delta, c + \delta)$, para algún $\delta > 0$.



En la figura: $f(c_3)$ es el máximo absoluto de $f(x)$, y $f(c_1)$, $f(c_2)$ y $f(c_3)$ son máximos relativos de la función.

9.10.2 DEFINICION.

(1) Decimos que una función $f(x)$ tiene un *valor mínimo absoluto en el punto c, si se cumple*

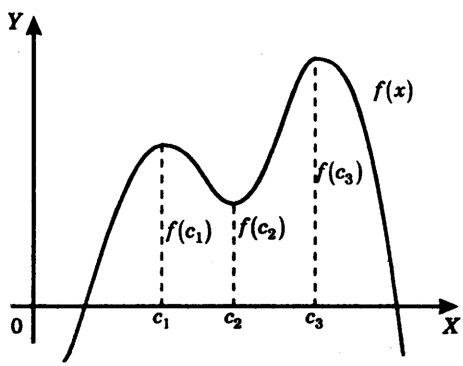
$$f(x) \geq f(c) ,$$

para todo x donde $f(x)$ está definida.

(2) Decimos que $f(x)$ tiene un *valor mínimo relativo en el punto c* si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo x *tal que* $|x - c| < \delta$.



En la figura:

$f(x)$ no tiene valor mínimo absoluto,

$f(c_1)$ es un máximo relativo,

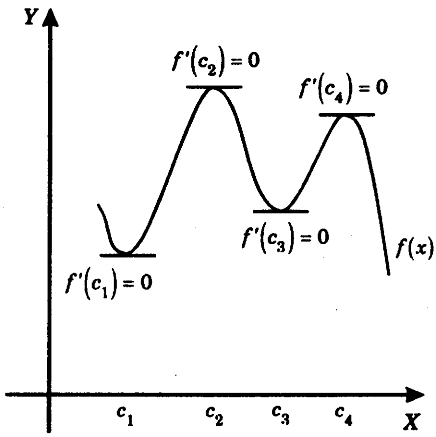
$f(c_2)$ es un mínimo relativo,

$f(c_3)$ es el valor máximo absoluto.

9.10.3 DEFINICION. Decimos que $f(x)$ tiene un *extremo relativo en el punto c,* si $f(c)$ es un valor máximo relativo o un valor mínimo relativo.

9.10.4 TEOREMA DEL EXTREMO ESTACIONARIO.

Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto c y existe $f'(c)$ entonces $f'(c)=0$.



En los puntos c_1 , c_2 , c_3 y c_4 de extremos relativos de $f(x)$, las tangentes son horizontales.

La prueba del presente teorema se da en uno de los problemas resueltos

(Ver problema 1, Sec.9.11.).

9.10.5 DEFINICION. Sea $f(x)$ una función definida en el punto c. Decimos que c es un *punto crítico (o número crítico)* de $f(x)$, si

$$f'(c)=0 \quad \text{o} \quad f'(c) \text{ no existe.}$$

Nota.

1. *Si $f(x)$ tiene un valor extremo relativo en c, entonces c es un punto crítico.* En efecto: si existe $f'(c)$ entonces –por el teorema 9.10.4 del extremo estacionario– debe cumplirse que $f'(c)=0$, y por lo tanto c es un punto crítico. Por otra parte, si $f'(c)$ no existe entonces de todas maneras c es un punto crítico, por definición.

2. Si c *es un punto crítico de* $f(x)$, *entonces no es siempre cierto que* $f(x)$ *tenga un extremo relativo en* c. Ver el ejemplo 1 que sigue.

EJEMPLO 1. Hallar los puntos críticos de la función $f(x)=\left(x^2-2x-8\right)^{1/3}$ y determinar en qué puntos críticos $f(x)$ tiene un valor extremo relativo.

SOLUCION.

1. **Puntos críticos de $f(x)$.**

Tenemos $$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2-2x-8\right)^{-2/3}(2x-2) = \frac{2(x-1)}{3\left(x^2-2x-8\right)^{2/3}}.$$

Ahora bien

$f'(x)=0$ si y sólo si $x-1=0$, o sea $x=1$,

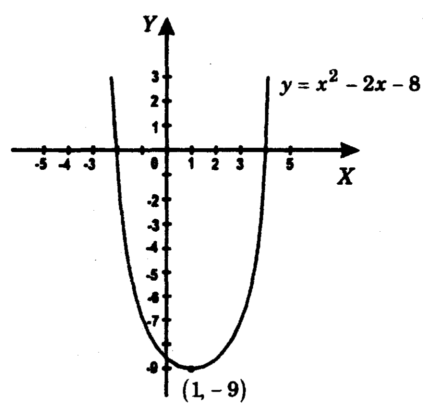
$f'(x)$ *no existe* si y sólo si el denominador $3\left(x^2-2x-8\right)^{2/3}$ se anula, o sea $x^2-2x-8=0$, ecuación que resuelta da $x=-2$, $x=4$.

Luego *los puntos criticos* de $f(x)$ son -2, 1, 4.

2. **Puntos críticos en los que $f(x)$ tiene un valor extremo.**

Puesto que $a\le b$ si y sólo si $a^3\le b^3$, vemos que

$f(x)=\left(x^2-2x-8\right)^{1/3}$ tiene un valor extremo en c, si y sólo si x^2-2x-8 tiene un valor extremo en c.



La figura muestra la gráfica de la parábola $y=x^2-2x-8=(x-1)^2-9$.

De donde vemos que solamente en $x=1$, $f(x)$ tiene un valor extremo.

En efecto, se trata de un mínimo absoluto.

PROBLEMA 2. Hallar los puntos críticos de la función $f(x) = \left(x^3-3x^2+4\right)^{1/3}$

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3-3x^2+4\right)^{-2/3}\left(3x^2-6x\right) = \frac{x(x-2)}{\left(x^3-3x^2+4\right)^{2/3}},$$

y como $\quad x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1) \quad$ resulta $\quad f'(x) = \dfrac{x}{(x-2)^{1/3}(x+1)^{2/3}}$.

Anulando el numerador y denominador sucesivamente obtenemos

$$x = 0$$

y $$(x-2)^{1/3}(x+1)^{2/3} = 0$$

o $$x = 2 \ , \quad x = -1.$$

9.10.6 CALCULO DE MAXIMOS Y MINIMOS ABSOLUTOS DE FUNCIONES CONTINUAS SOBRE UN INTERVALO CERRADO.

Sea $f(x)$ una función continua en todo punto de x de un intervalo cerrado $[a,b]$. Sabemos que (ver propiedades de las funciones continuas) $f(x)$ tiene un valor máximo absoluto M y un valor mínimo absoluto m en el intervalo cerrado. Es decir que existen puntos x_0 y x_1 en $[a,b]$ tales que

$$M = f(x_0) \ , \quad m = f(x_1) \ ,$$
$$m \le f(x) \le M \quad \text{para todo } x \text{ en } [a,b].$$

Regla para calcular máximos y mínimos absolutos.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Para hallar M y m, los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x)$ en $[a, b]$, respectivamente, se procede de la siguiente manera :

(I) Se calculan los valores de $f(x)$ en los puntos críticos c de la función en el intervalo $[a, b]$.

(II) Se calculan los valores $f(a)$ y $f(b)$.

(III) Se aplican las fórmulas :

(1) M = mayor de los valores encontrados en (I) y (II)

(2) m = menor de los valores encontrados en (I) y (II)

Prueba de las fórmulas III (1) y (2).

Vamos a probar que se cumple III (1).

Escribimos $\quad M = f(x_0) \quad$ con $\ a \le x_0 \le b$

y $\quad f(x) \le M \quad$ para todo x tal que $\ a \le x \le b$.

Veremos que M es uno de los valores dados en (I) o (III), y esto demostrará la fórmula III (1).

Pueden ocurrir los siguientes casos:

(i) $a < x_0 < b$. **En este caso, $M = f(x_0)$ es un máximo relativo de la función (por ser un máximo absoluto en el intervalo abierto (a, b)), y por lo tanto, $x_0 = c$ es un punto crítico (ver nota 9.10.5).**

Luego M es uno de los valores indicados en (I).

(ii) $x_0 = a, b$. **En este caso, $M = f(x_0)$ es igual a $f(a)$ o $f(b)$, y por lo tanto, es uno de los valores indicados en (II).**

La prueba de la fórmula III es análoga. Omitimos los detalles.

EJEMPLO 1. **Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ en el intervalo $[-1, 4]$.**

SOLUCION.

(1) ***Hallamos los puntos críticos de $f(x)$ en $[-1, 4]$.*** **Resolviendo la ecuación $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$ resultan las raíces $x = 0, 2$ y -2.**

Puesto que solamente 0 y 2 se encuentran en $[-1, 4]$, los *puntos críticos en ese intervalo son* 0 *y* 2.

(2) **Calculamos los valores de $f(x)$ en los puntos críticos 0 y 2 y en los extremos -1, 4 del intervalo $[-1, 4]$, en la tabla**

x	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
-1	9
0	16
2	0
4	144

Luego por las fórmulas III (1) y (2)

$$\begin{aligned} M &= \text{máximo absoluto de } f(x) \text{ en } [-1, 4] \\ &= \text{mayor de } 9, 16, 0, 144 = 144, \end{aligned}$$

y $\quad m$ = mínimo absoluto de $f(x)$ en $[-1,4]$

= menor de 9, 16, 0, 144 = 0 .

EJEMPLO 2. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{2/3} & \text{si } x \le 7 \\ x^2 - 6x - 1 & \text{si } 7 < x \end{cases}$$

en los siguientes intervalos

(1) $[-2,8]$ $\qquad$ (3) $[-2,0]$

(2) $[0,8]$ $\qquad$ (4) $[8,9]$

SOLUCION. Calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\,(x+1)^{1/3}} & x < 7\,,\ x \ne -1 \\ 2x - 6 & x > 7 \end{cases}$$

Puesto que $f'(x)$ no existe en $x = 7$ y $x = -1$ y $f'(x) = 2x - 6 = 0$ da $x = 3$, tenemos que los puntos críticos de $f(x)$ son -1, 3 y 7.

Los valores de $f(x)$ en -2, -1, 0, 7, 8, 9 son

x	$f(x)$
-2	1
-1	0
0	1
7	4
8	15
9	26

Luego

(1) máximo absoluto de $f(x)$ en $[-2,8]$ = mayor de 1, 0, 4, 15 = 15 ,

mínimo absoluto en $[-2,8]$ = menor de 1, 0, 4, 15 = 0 .

(2) máximo absoluto de $f(x)$ en $[0, 8]$ = mayor de 1, 4, 15 = 15 ,

mínimo absoluto en $[0, 8]$ = menor de 1, 4, 15 = 1

(3) máximo absoluto de $f(x)$ en $[-2, 0]$ = mayor de 1, 0 = 1 ,

mínimo absoluto en $[-2, 0]$ = menor de 1, 0 = 0

(4) máximo absoluto de $f(x)$ en $[8, 9]$ = mayor de 15, 26 = 26 ,

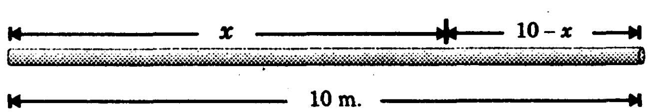
mínimo absoluto en $[8, 9]$ = menor de 15, 26 = 15 .

EJEMPLO 3. Un trozo de alambre de 10 m. de longitud se corta en dos partes. Una parte será doblada en forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo debería ser cortado el alambre para que

(1) el área combinada de las dos figuras sea tan pequeña como sea posible ?

(2) el área combinada de las dos figuras sea tan grande como sea posible ?

SOLUCION.



Supongamos que se toman x metros de alambre para formar un círculo y $10 - x$ metros para formar un cuadrado. El área total A obtenida es entonces

$$A = \textit{área del círculo} + \textit{área del cuadrado}$$

$$= \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 \quad \text{o} \quad A = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16} .$$

Buscamos los valores máximo y mínimo absolutos de la función $A = A(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 10]$.

Aplicamos la regla para calcular tales valores

Resolviendo $$A'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{(10-x)(-1)}{8} = 0$$

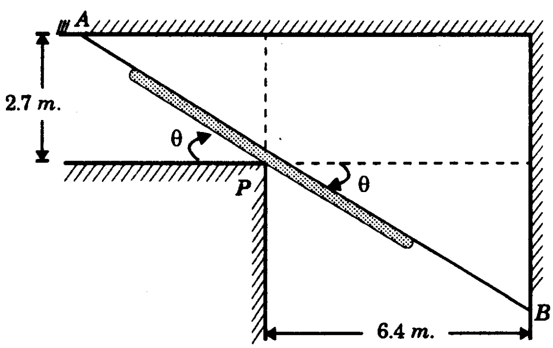
obtenemos el punto crítico $$x = \frac{10\pi}{\pi + 4} .$$

Calculamos los valores de $A(x)$ en los puntos $0, \dfrac{10\pi}{\pi+4}$ y 10 :

x	A
0	$\frac{25}{4} = 6.25$
$\dfrac{10\pi}{\pi+4}$	$\dfrac{25}{\pi+4} \approx 3.50$
10	$\dfrac{25}{\pi} \approx 7.96$

Luego el mínimo valor $\dfrac{25}{\pi+4}$ se obtiene cuando $x = \dfrac{10\pi}{\pi+4}$,
y el máximo valor $\dfrac{25}{\pi}$ se obtiene cuando $x = 10$.

EJEMPLO 4. Hallar la longitud de la escalera de longitud máxima que se puede pasar por la esquina de un corredor cuyas dimensiones se indican en la figura.
Se supone que la escalera se transporta paralela al suelo.



SOLUCION. Sea AB un segmento que pasa por P con extremos en las paredes como se indica en la figura.
Buscamos la longitud mínima de AB . Entonces una escalera de longitud L pasará por la esquina si y sólo si $L \leq$ longitud mínima de AB, y la longitud máxima de L será

Longitud máxima de L = Longitud mínima de AB **(1)**

Calculamos el segundo miembro. Tenemos

$$AB = AP + PB = 2.7 \operatorname{cosec} \theta + 6.4 \sec \theta$$

y debemos determinar el mínimo absoluto de AB en el intervalo cerrado $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Los puntos críticos en $0 < \theta < \pi/2$ se obtienen de

$$0 = \frac{d}{d\theta}(AB) = -2.7 \operatorname{cosec} \theta \,.\, \operatorname{ctg} \theta + 6.4 \sec \theta \,.\, \operatorname{tg} \theta = -2.7 \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} + 6.4 \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} ,$$

$$\operatorname{tg}^3 \theta = \frac{2.7}{6.4} = \frac{27}{64} , \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4} , \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{4}\right) .$$

Los valores de AB en $\theta = 0$, $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{3}{4}\right)$, $\dfrac{\pi}{2}$, son:

a) en $\theta = 0$, $AB = \infty$;

b) en $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}$, se tiene $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$, $\sec \theta = \frac{5}{4}$

y $$AB = 2.7\left(\tfrac{5}{3}\right) + 6.4\left(\tfrac{5}{4}\right) = 12.5 \;;$$

c) en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $AB = \infty$.

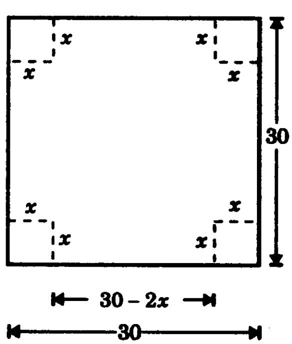
Luego el mínimo absoluto de AB es 12.5 .

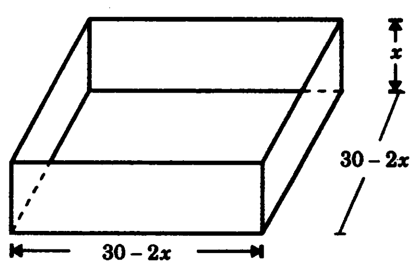
Finalmente, gracias a la igualdad (1) tenemos que

Longitud máxima de $L = 12.5$ metros.

EJEMPLO 5. Se desea fabricar cajas abiertas de piezas de cartón cuadradas de 30 cm de lado, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados. Encontrar la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea el mayor posible.

SOLUCION.





Sea x centímetros la longitud del lado del cuadrado que se va a cortar.

Entonces el volumen de la caja, expresado en cm^3, es $V = x(30-2x)^2$.

Debemos hallar el máximo valor de V sujeto a la restricción $0 \le x \le 15$, pues $2x \le 30$.

Resolviendo la ecuación
$$0 = \frac{dV}{dx} = (30-2x)^2 + 2x(30-2x)(-2)$$
$$= (30-2x)(30-2x-4x) = (30-2x)(30-6x)$$

resulta $x = 15$ y $x = 5$.

Los valores de V en $x = 0, 5$ y 15 son:

$x = 0$, $V = 0$,

$x = 5$, $V = 2{,}000$,

y $x = 15$, $V = 0$.

Por tanto, máximo de V en el intervalo cerrado $[0, 15]$ es 2,000 y se obtiene cuando $x = 5$.

9.11 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Probar que si $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto c y existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$

SOLUCION. Supongamos que $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto c.

Luego existe un $\delta > 0$ tal que $|x-c| < \delta$ implica $f(x) \le f(c)$ (*).

Paso 1. $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$.

En efecto, si $c-\delta < x < c$ entonces $f(x)-f(c) \le 0$ (por (*))

y $x-c < 0$.

Dividiendo resulta

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0 \quad \text{para todo } x \text{ tal que } c-\delta < x < c.$$

y tomando límite lateral por la izquierda $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$

pues todos los cocientes son ≥ 0.

Paso 2. $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$.

En efecto, si $c < x < c+\delta$ entonces $f(x)-f(c) \leq 0$ (por (*)) y $x-c>0$.

Dividiendo resulta $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ para todo x tal que $c < x < c+\delta$,

y tomando límite lateral por la derecha $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$,

pues todos los cocientes son ≤ 0.

Paso 3. $f'(c)=0$. En efecto

$$0 \leq \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad \text{(por el paso (1))}$$

$$= f'(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad \text{(las igualdades por la definición de } f'(c))$$

$$\leq 0 \qquad \text{(por el paso (2))}$$

de donde $0 \leq f'(c) \leq 0$.

Y esto prueba que $f'(c)=0$, que es lo que queríamos demostrar.

A continuación tratamos el caso en el que $f(c)$ es un mínimo relativo.
Entonces $-f(c)$ es un máximo relativo de $-f(x)$, y, por lo que ya hemos establecido, $-f'(c)=0$. Luego también resulta $f'(c)=0$.

La prueba queda concluida.

PROBLEMA 2. Hallar los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones

(1) $f(x)=\dfrac{1}{7}x^{7/3} - x^{4/3} + 3x^{1/3}$ (2) $f(x)=x^4+11x^3+34x^2+15x-2$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

SOLUCION.

(1) Tenemos $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{4/3} - \dfrac{4}{3}x^{1/3} + x^{-2/3} = \dfrac{x^2-4x+3}{3x^{2/3}} = \dfrac{(x-3)(x-1)}{3x^{2/3}}$

Resolviendo la ecuación $0 = f'(x) = (x-3)(x+1)$ resultan las raíces $x = 3$, 1; y la derivada $f'(x)$ no existe si $x = 0$.

Luego los puntos críticos de la función son 0, 1, 3.

(2) Resolviendo la ecuación $f'(x) = 4x^3 + 33x^2 + 68x + 15 = 0$.

Por simple inspección vemos que $x = -3$, -5 son raíces de la ecuación. Factorizando se tiene $4x^3 + 33x^2 + 68x + 15 = 4(x+3)(x+5)\left(x+\frac{1}{4}\right)$.

Luego los puntos críticos son $x = -5, -3, -1/4$.

(3) Tenemos
$$f'(x) = \frac{\left(x^2-9\right) - x(2x)}{\left(x^2-9\right)^2} = -\frac{x^2+9}{\left(x^2-9\right)^2}.$$

Puesto que $x^2 + 9 \neq 0$ la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene raíces reales.

Además, $f'(x)$ no existe si y sólo si $x^2 - 9 = 0$, esto es cuando $x = \pm 3$. Luego los puntos críticos de $f(x)$ son $x = -3$, 3 .

PROBLEMA 3. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de cada una de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

(1) $f(x) = x^3 + 5x - 4$ en $[-3, -1]$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ en $[-1, 2]$

(3) $f(x) = 1 - (x-3)^{2/3}$ en $[-5, 4]$

(4) $f(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & \text{si } x \leq -4 \\ 12 - (x+1)^2 & \text{si } x > -4 \end{cases}$, en $[-6, 0]$.

SOLUCION. En primer lugar, observemos que las funciones dadas son continuas en los intervalos indicados de manera que existen los valores máximos y mínimos absolutos y podemos hacer uso de la regla que hemos presentado en 9.10.6 para calcularlos.

(1) Resolviendo la ecuación $0 = f'(x) = 3x^2 + 5$ obtenemos $x = \pm\sqrt{-5/3}$, que no son números reales.

Así, $f(x)$ no tiene puntos críticos.

Puesto que los valores de $f(x)$ en $x = -3$ y -1, son respectivamente, -46 y -10, concluimos que:

$$\textit{máximo de } f(x) \textit{ en } [-3, -1] \textit{ es } -10,$$

$$\textit{mínimo de } f(x) \textit{ en } [-3, -1] \textit{ es } -46.$$

(2) **Tenemos** $$f'(x) = \frac{(x+2)-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} ,$$

de donde se sigue que $f'(x) \neq 0$ y que $f'(x)$ no existe si $(x+2)=0$ o $x=-2$. Luego el único punto crítico de la función es $x=-2$.
Pero -2 no se encuentra en el intervalo $[-1, 2]$, de modo que no lo consideramos para calcular los extremos absolutos de $f(x)$.

Los valores de $f(x)$ en $x=-1$ y 2 son, respectivamente, -1 y $1/2$.

Por lo tanto *máximo absoluto de* $\frac{x}{x+2}$ *en* $[-1, 2]$ es $1/2$, y

mínimo absoluto de $\frac{x}{x+2}$ *en* $[-1, 2]$ es -1.

(3) **Tenemos** $$f'(x) = -\frac{2}{3(x-3)^{1/3}} .$$

Luego $x=3$ es el único punto crítico de la función y se encuentra en el intervalo $[-5, 4]$.
Puesto que los valores de $f(x)$ en $x=-5$, 3 y 4, son, respectivamente, -3, 1 y 0, concluimos que :

máximo absoluto de $f(x)$ *en* $[-5, 4]$ es 1, y

mínimo absoluto de $f(x)$ *en* $[-5, 4]$ es -3.

(4) **Tenemos** $$f'(x) = \begin{cases} -2(x+5) & x<-4 \\ -2(x+1) & x>-4 \\ \textit{no existe} & x=-4 \end{cases}$$

Luego $f'(x)=0$ si y sólo si $x+5=0$ o $x+1=0$,

y $f'(x)$ no existe si $x=-4$,

y por lo tanto, los puntos críticos son $-5, -4$, y -1.
Estos tres valores se encuentran en el intervalo $[-6, 0]$.
Puesto que los valores de $f(x)$ en $-6, -5, -4, -1, 0$, son respectivamente, 3, 4, 3, 12 y 11, tenemos que:

máximo absoluto de $f(x)$ *en* $[-6, 0]$ es 12,

mínimo absoluto de $f(x)$ *en* $[-6, 0]$ es 3.

PROBLEMA 4. Hallar los coeficientes p y q del trinomio cuadrado: $y = x^2 + px + q$ de modo que este trinomio tenga un mínimo $y = 3$ cuando $x = 1$.

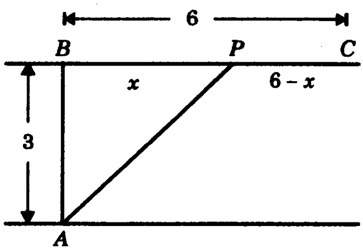
SOLUCION. Puesto que la función y tiene un mínimo en $x = 1$ se debe cumplir, por el teorema 9.10.4, del extremo estacionario, que $y' = 2x + p = 0$ en $x = 1$, o sea $2(1) + p = 0$, de donde $p = -2$; y como $y = 3$ cuando $x = 1$, sustituyendo estos valores tenemos

$$3 = (1)^2 - 2(1) + q \text{ , de donde } q = 4.$$

Así, el trinomio cuadrado es $y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$ que tiene el valor mínimo $y = 3$ cuando $x = 1$.

PROBLEMA 5. Los puntos A y B están opuestos uno al otro en las riberas de un río recto que mide 3 Km. de ancho.

El punto C está en la misma ribera que B, pero a 6 Km. río abajo de B. Se desea tender un cable de A a C. Si el costo por Km. de cable es el 25% más caro bajo el agua que en tierra, ¿Qué línea de cable sería menos costosa ?



SOLUCION.

Sean P un punto en el segmento BC, a una distancia x Km ,

g = costo por Km. de cable en tierra ,

y $g + 25\% g = \frac{5}{4}g$ = costo por Km. de cable bajo el agua.

Tenemos G = costo total = costo de AP + costo de PC ,

o sea $G = \frac{5}{4} g \sqrt{x^2 + 3^2} + g(6 - x)$.

Buscamos el mínimo absoluto de G en el intervalo cerrado $0 \le x \le 6$.

Tenemos $0 = \dfrac{dG}{dx} = \dfrac{5gx}{4\sqrt{x^2+9}} - g$, $\quad 5x - 4\sqrt{x^2+9} = 0$,

$$(5x)^2 = \left(4\sqrt{x^2+9}\right)^2 \quad \text{o} \quad 9x^2 = 16(9) ,$$

de donde $x = \pm 4$, y solamente $x = 4$ se encuentra en el intervalo $[0, 6]$.

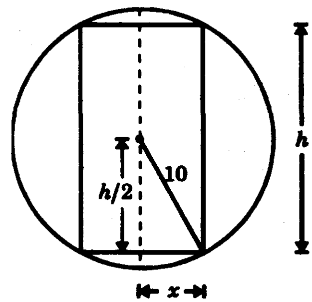
Los valores de G en 0, 4 y 6, son respectivamente, $\frac{39}{4}g$, $\frac{33}{4}g$ y $\frac{15}{4}\sqrt{5}\,g$, de los cuales el menor es $G = \frac{33}{4}g$.

Luego el mínimo absoluto ocurre cuando $x = 4$.

PROBLEMA 6. Hallar las dimensiones del cilindro recto circular de mayor superficie lateral que puede ser inscrito en una esfera de radio 10 cm.

SOLUCION.

Sean



x el radio de la base del cilindro en cm.

h la altura del cilindro en cm.

S = la superficie lateral del cilindro

$= 2\pi x h$, en cm^2.

Tenemos $\frac{h}{2} = \sqrt{10^2 - x^2}$, y por lo tanto

$$S = 4\pi x \sqrt{10^2 - x^2}$$

Buscamos el valor máximo de S en $0 \le x \le 10$.

Tenemos $$0 = \frac{dS}{dx} = 4\pi\sqrt{100 - x^2} + \frac{4\pi(-x^2)}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{4\pi(100 - 2x^2)}{\sqrt{100 - x^2}} ,$$

de donde $100 - 2x^2 = 0$, $x = \pm 5\sqrt{2}$.

Solamente $5\sqrt{2}$ se encuentra en el intervalo cerrado $[0, 10]$.

Los valores de S en los puntos $x = 0$, $5\sqrt{2}$ y 10, son respectivamente, $S = 0$, 200π y 0 cm^2. Luego el valor máximo de S es 200π cm^2 y se obtiene cuando $x = 5\sqrt{2}$ cm.

PROBLEMA 7. Encontrar las dimensiones del cilindro recto circular de mayor volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 10 cms.

SOLUCION. Sean x y h como en el problema 6.

El volumen V del cilindro es entonces

$$V = (\textit{área de la base})(\textit{altura}) = \pi x^2 h = 2\pi x^2\sqrt{10^2 - x^2} , \quad \text{pues} \quad \frac{h}{2} = \sqrt{10^2 - x^2} .$$

Resolviendo la ecuación

$$0 = \frac{dV}{dx} = 4\pi x\sqrt{100 - x^2} - \frac{2\pi x^3}{\sqrt{100 - x^2}} ; \qquad x(200 - 3x^2) = 0 ,$$

$$x = 0 , \pm\frac{10}{3}\sqrt{6}.$$

Calculando los valores de V en $x = 0$, $\frac{10}{3}\sqrt{6}$ y 10, obtenemos $V = 0$, $\frac{4000}{9}\pi\sqrt{3}$ y 0 cm^3, respectivamente.

El valor máximo de V es $\frac{4000}{9}\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$ y se obtiene cuando $x = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm.

PROBLEMA 8. ¿En qué puntos de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ la tangente forma con el eje X un ángulo máximo (en valor absoluto)?

SOLUCION. Buscamos el valor máximo del valor absoluto de $y' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

Resolviendo la ecuación $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)' = -\dfrac{2\left(1+x^2\right)^2 - 4x\left(1+x^2\right)(2x)}{\left(1+x^2\right)^4} = 0$

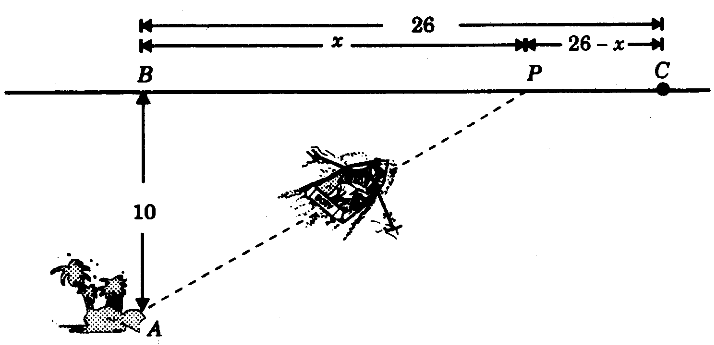
de donde $\left(1+x^2\right)\left(1-3x^2\right) = 0$, y de aquí $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{3}{4}$.

Estos valores dan un valor máximo para $|y'|$ pues

$$\lim_{x\to\pm\infty} |y'| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2|x|}{\left(1+x^2\right)^2} = 0.$$

PROBLEMA 9. Una isla A está a 10 Km. del punto B más cercano sobre una playa recta. Una tienda está en el punto C, a 26 Km. de B sobre la playa. Si un hombre rema a razón de 5 Km/h. y camina a razón de 13 Km/h, ¿en qué punto debería desembarcar para ir de la isla a la tienda en el menor tiempo posible?

SOLUCION.



Sea x Km. la distancia de P a B, donde P es un punto en el segmento BC (ver figura).

El tiempo total t horas que el hombre emplea para ir de A a P y de P a C, es la suma

$$t = \frac{\overline{AP}}{5} + \frac{\overline{PC}}{13} \qquad \left(\text{pues tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}\right)$$

$$t = \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{5} + \frac{26-x}{13}.$$

Resolvemos la ecuación

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x}{5\sqrt{x^2+100}} - \frac{1}{13}, \qquad 13x - 5\sqrt{x^2+100} = 0\,,$$

$$169x^2 = 25\left(x^2+100\right), \text{ de donde } x = \tfrac{25}{6}.$$

Calculamos los valores de t en los puntos $x = 0$, $\frac{25}{6}$ y 26.

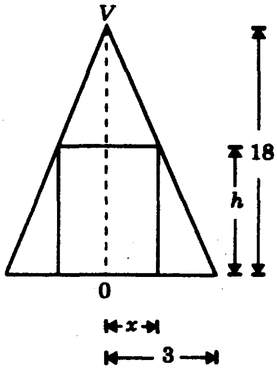
Tenemos para $x = 0$, $t = 4$,

para $x = \frac{25}{6}$, $$t = \frac{\sqrt{\left(\frac{25}{6}\right)^2+10^2}}{5} + \frac{26-\left(\frac{25}{6}\right)}{13} = 3\tfrac{11}{13},$$

para $x = 26$, $t = \frac{2\sqrt{194}}{5} \approx 5.57.$

Luego el tiempo mínimo es $t = 3\frac{11}{13}$ horas y se obtiene cuando $x = \frac{25}{6}$ Km.

PROBLEMA 10. Encontrar las dimensiones del cilindro recto circular de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono recto circular de radio $r = 3$ cm. y altura $h = 18$ cm.



SOLUCION. Sea V el volumen en cm^3 del cilindro de radio x cm. y altura h cm.

Tenemos $V = \pi x^2 h$

y $$\frac{x}{3} = \frac{18-h}{18} \quad \text{(por semejanza de triángulos)}$$

Sustituyendo $h = 18 - 6x$ resulta $V = 6\pi x^2(3-x)$.

Resolviendo la ecuación $0 = \dfrac{dV}{dx} = 12\pi x(3-x) - 6\pi x^2$, obtenemos $x=0$, $x=2$.

Calculamos los valores de V en $x=0$, 2 y 3.

Para $x=0$, $V=0$,

$x=2$, $V=24\pi$,

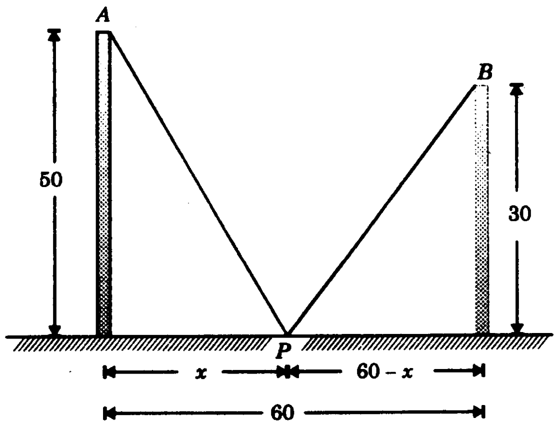
$x=3$, $V=0$.

Luego el volumen máximo es $V=24\pi\ \text{cm}^3$

y se obtiene cuando $h=6$ cm y $x=2$ cm.

PROBLEMA 11. Dos postes de 50 y 30 m. de altura están separados una distancia de 60 m. ¿Qué longitud mínima debe tener un cable que une un punto del suelo con los extremos superiores de los postes?

SOLUCION.



Sea L la longitud en m. del cable que une A con un punto P a x m. de la base del poste A y al punto P con B

$$L=\overline{AP}+\overline{PB}=\sqrt{x^2+50^2}+\sqrt{(60-x)^2+30^2}\ .$$

Resolviendo la ecuación

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+50^2}}-\frac{(60-x)}{\sqrt{(60-x)^2+30^2}}=0$$

$$x^2\left[(60-x)^2+30^2\right]=(60-x)^2\left(x^2+50^2\right),$$

resultan las raíces $\qquad x = \frac{75}{2}\,,\ 150.$

Calculamos los valores de L en $x=0,\ \frac{75}{2}$ y 60.

Tenemos para

$x=0\,,\qquad L = 50+30\sqrt{5} \approx 117.08$

$x=\frac{75}{2}\qquad L = \sqrt{\left(\frac{75}{2}\right)^2+50^2} + \sqrt{\left(60-\frac{75}{2}\right)^2+30^2} = \frac{125}{2}+\frac{75}{2} = 100$

$x=60,\qquad L = 10\sqrt{61}+30 \approx 108.10$

Luego la longitud mínima es $L = 100$ m. ,

y se obtiene cuando $x=\frac{75}{2}$ m.

PROBLEMA 12. Hallar las dimensiones del cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a un hemisferio de radio a.

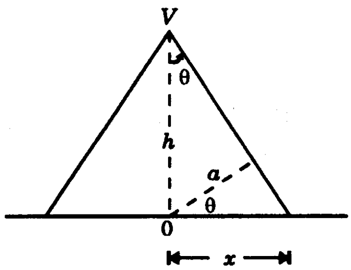
SOLUCION. Tenemos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi x^2 h\,,$$

$$x = a\sec\theta$$

$$h = x\operatorname{ctg}\theta = a\sec\theta\operatorname{ctg}\theta\,,$$

y por tanto, $\quad V = \dfrac{\pi a^3}{3}\sec^3\theta\,.\operatorname{ctg}\theta\,.$



Buscamos el valor mínimo de V en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Observemos que $\quad \lim\limits_{\theta\to0^+} V(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} V(\theta) = +\infty\,,\ $ y

por consiguiente, el valor mínimo de V existe y ocurre en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Resolviendo la ecuación

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi a^3}{3}\left(3\sec^3\theta.\operatorname{tg}\theta.\operatorname{ctg}\theta - \sec^3\theta.\operatorname{cosec}^2\theta\right) = 0\,,$$

$$\sec^3\theta.\left(3 - \operatorname{cosec}^2\theta\right) = 0\,.$$

Obtenemos $\sec\theta = 0$, $\operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{3}$ y $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$.

Excluyendo los valores $\sec\theta = 0$ y $\operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{3}$ por la condición $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, concluimos que el valor mínimo de V ocurre cuando $\theta = \sqrt{3}$, y entonces las dimensiones del cono son

$$\text{radio} = a\sec\theta = a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

y

$$\text{altura} = a\sec\theta.\operatorname{ctg}\theta = a\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\right) = a\sqrt{3}\ .$$

PROBLEMA 13.

(1) Hallar el área del mayor rectángulo que tenga un perímetro de 40 cm.

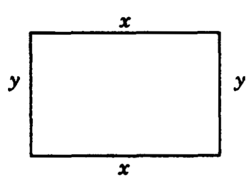
(2) Hallar el área máxima de un triángulo isósceles que tenga un perímetro de 18 cm.

SOLUCION.

(1) Tenemos $A = xy$,

(ver figura) $2x + 2y = 40$,

de donde $A = x(20 - x)$.



Hallando las raíces de la ecuación

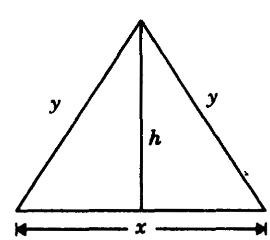
$$\frac{dA}{dx} = (20 - x) + (x)(-1) = 0\ , \text{ de donde } x = 10.$$

Los valores de A en $x = 0, 10$ y 20 son, respectivamente, 0, 100 y 0.

Luego el área máxima $A = 100$ se obtiene cuando $x = 10$. Y en este caso $y = 10$.

Por lo tanto, el rectángulo de área máxima con perímetro 40 cm. es un cuadrado de área 100 cm^2

(2) Tenemos $A = \dfrac{xh}{2}$ (ver figura),



$$h = \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\ ,$$

$$x + 2y = 18\ .$$

Despejando y de la última ecuación y sustituyendo en la segunda ecuación resulta

$$h = 3\sqrt{9-x}\ .$$

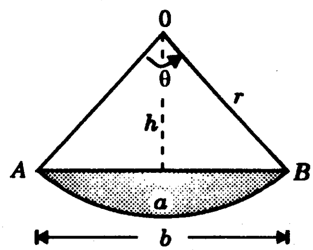
Luego $\quad A = \frac{3}{2}x\sqrt{9-x} \quad$ y vemos que $x \le 9$.

Hallando las raíces de la ecuación $\quad \dfrac{dA}{dx} = \dfrac{3}{2}\sqrt{9-x} - \dfrac{3x}{4\sqrt{9-x}} = 0$

$$2(9-x)-x=0\ , \quad \text{de donde } x=6.$$

Los valores de A en $x=0$, 6 y 9, son respectivamente 0, $9\sqrt{3}$ y 0.
Por tanto el área máxima es $A = 9\sqrt{3}$ cm^2 y corresponde a un triángulo equilátero de lado 6 cm.

PROBLEMA 14. Una lámina de hojalata de ancho a se dobla en forma de un arco circular para hacer un canal cílindrico. ¿Qué ángulo central θ debe elegirse para que el canal tenga una capacidad máxima?



SOLUCION.

Sea V el volumen del canal y supongamos que L es la longitud del arco de la lámina.

Tenemos

$$V = L\,(\textit{Area del sector circular} - \textit{Area del triángulo})$$

$$= L\left(\frac{\theta r^2}{2} - \frac{hb}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(\theta r^2 - hb\right). \qquad (1)$$

Por otra parte $\quad h = r\cos\dfrac{\theta}{2}\ , \quad \dfrac{b}{2} = r\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\ , \quad r = \dfrac{a}{\theta}\ .$

Luego $\quad hb = 2r^2\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2} = r^2\,\text{sen}\,\theta = \dfrac{a^2\,\text{sen}\,\theta}{\theta^2} \quad$ y $\quad \theta r^2 = \dfrac{a^2}{\theta}$,

y sustituyendo en (1) resulta $\quad V = \dfrac{La^2}{2}\cdot\dfrac{(\theta - \text{sen}\,\theta)}{\theta^2}\ .$

Resolviendo la ecuación $\quad \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{La^2}{2}\cdot\dfrac{\theta^2(1-\cos\theta) - (\theta - \text{sen}\,\theta).(2\theta)}{\theta^4} = 0$

$$\theta.(\ \theta - \theta\cos\theta - 2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\ ) = 0$$

$$\theta\left[-\theta\,(1+\cos\theta) + 2\,\text{sen}\,\theta\right] = 0\,,$$

de donde $\theta = 0$, y $\theta = \dfrac{2\,\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{4\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$ y $\dfrac{\theta}{2} = \text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}$, de donde, de nuevo $\theta = 0$.

Así, el único punto crítico de V es $\theta = 0$.

Calculamos los valores de V en $\theta = 0$ y π.

En $\theta = 0$, se obtiene $V = \dfrac{0}{0}$, pero $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} V(\theta) = \frac{La^2}{2}\lim_{\theta\to 0^+}\frac{(\theta - \text{sen}\,\theta)}{\theta^2} = 0,$

sea bien por (2) del problema 17, de la presente sección, o por la regla de L'Hôspital.

Y en $\theta = \pi$, se obtiene $\quad V = \dfrac{La^2}{2}\left(\dfrac{\pi - \text{sen}\,\pi}{\pi^2}\right) = \dfrac{La^2}{2\pi}$.

Luego el máximo valor de V es $\dfrac{La^2}{2\pi}$ y se obtiene cuando $\theta = \pi$.

PROBLEMA 15. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la elipse $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$, y cuyos lados son paralelos a los ejes de la elipse.

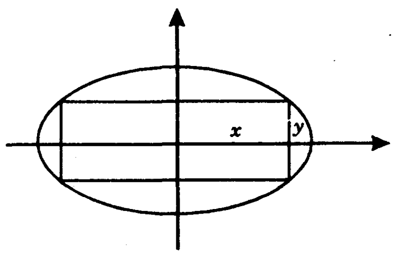
SOLUCION. Tenemos $A = 4xy$.

Despejando y de la ecuación de la elipse

$$y = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{18 - x^2}\ ,$$

y considerando $y \geq 0$, resulta

$$A = \tfrac{8}{3}\,x\sqrt{18 - x^2}\,.$$



Las raíces de la ecuación

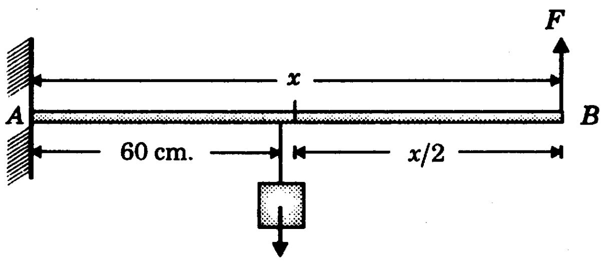
$$\frac{dA}{dx} = \frac{8}{3}\sqrt{18 - x^2} - \frac{8x^2}{3\sqrt{18 - x^2}} = 0$$

$$\left(18 - x^2\right) - x^2 = 0\ ,$$

son $x = \pm 3$.

Los valores de A en $x = 0$, 3 y $\sqrt{18}$, son, respectivamente, 0, 24 y 0. Por lo tanto, el máximo valor de A es 24 y se obtiene cuando $x = 3$, $y = 2$. Las dimensiones del rectángulo de área máxima son 6 de base y 4 de altura.

PROBLEMA 16. De una varilla homogénea *AB,* que puede rotar alrededor de un punto A, cuelga un cuerpo de 24 Kg. de peso a una distancia de 60 cm. de A y se mantiene en equilibrio con una fuerza vertical F aplicada en el extremo libre B. Si un centímetro de longitud de la varilla pesa 50 gr. , hallar la longitud de la varilla para que la fuerza F sea la mínima posible y hallar F_{min}.



SOLUCION.

Puesto que la varilla está en equilibrio se tiene (calculamos momentos respecto del punto A)

Momento de la fuerza F = momento del cuerpo + momento de la varilla

El momento del cuerpo es $24(60) = 1{,}440$,

y el de la varilla es $\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{50x}{1000}\right)$, pues el centro de gravedad de la varilla está en $\dfrac{x}{2}$, y su peso es $\dfrac{50}{1000}x$.

Luego $$Fx = 1440 + \frac{x^2}{40}, \qquad F = \frac{1440}{x} + \frac{x}{40}.$$

Resolviendo la ecuación

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{1440}{x^2} + \frac{1}{40} = 0 \quad \text{resulta} \quad x = \pm 240.$$

El valor $x = -240$ debe ser excluido por razones obvias y como $\lim\limits_{x\to 0^+} F = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} F$, vemos que $x = 240$ da lugar al mínimo valor de F, que es $F_{\min} = \frac{1440}{240} + \frac{240}{40} = 12$.

PROBLEMA 17.

(1) Usando la regla para calcular máximos y mínimos probar que

$$\operatorname{sen}\theta \geq \theta - \frac{\theta^3}{6} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

(2) Probar que $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^2} = 0$.

SOLUCION.

(1) Tomemos $h(\theta) = \operatorname{sen}\theta - \theta + \dfrac{\theta^3}{6}$.

Resolviendo la ecuación

$$\frac{dh}{d\theta} = \cos\theta - 1 + \frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$\frac{\theta^2}{2} = 1 - \cos\theta$$

$$\frac{\theta^2}{2} = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

y como $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} \leq \dfrac{\theta}{2}$ si $\theta > 0$, tenemos que $\dfrac{\theta}{2} = 0$ es la única raíz de la ecuación.

Los valores de $h(\theta)$ en $\theta = 0$ y $\dfrac{\pi}{2}$ son, respectivamente, 0 y $1 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi^3}{48} \approx 0.8$.

Luego el mínimo absoluto de h en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es 0, y por lo tanto $h(\theta) \geq 0$ o sea $\text{sen}\,\theta - \theta + \frac{\theta^3}{6} \geq 0$.

Luego se cumple $\quad \text{sen}\,\theta \geq \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad$ para $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(2) De (1) tenemos

$$\text{sen}\,\theta \geq \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$\theta - \text{sen}\,\theta \leq \frac{\theta^3}{6}$$

$$0 < \frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\theta} \leq \frac{\theta}{6} \quad \text{para} \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tomando límites cuando $\theta \to 0^+$, obtenemos

$$0 \leq \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\theta^2} \leq \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta}{6} = 0$$

Así, $\displaystyle\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\theta^2} = 0$.

Nota. El $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\theta^2} = 0$ puede evaluarse de una manera más sencilla haciendo uso de la *Regla de L'Hôspital*:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textbf{(1)}$$

que será establecida en la Sección 10.7, Cap.10.

En efecto, aplicando (1) dos veces al cociente $\dfrac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\theta^2}$ resulta

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{2\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{2\theta} = 0.$$

Capítulo 10

El Teorema del Valor Medio y sus Aplicaciones

10.1 TEOREMA DE ROLLE.

Sea $f(x)$ una función tal que

(1) es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$,

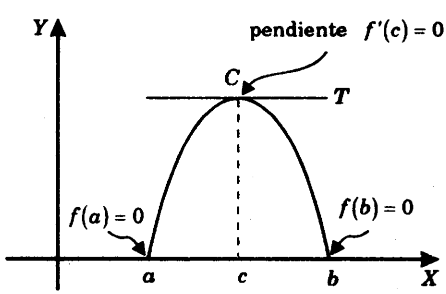
(2) es diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y

(3) $f(a)=f(b)=0$.

Entonces existe un número c tal que $a<c<b$ y $f'(c)=0$.

Interpretación geométrica.

En algún punto C de la curva sobre el intervalo abierto (a,b), la recta tangente T es paralela al eje X.



La figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ que satisface las condiciones (1), (2) y (3). El teorema de Rolle nos asegura que existe al menos un número c entre a y b, tal que la recta tangente a la curva en el punto $C = (c, f(c))$ tiene pendiente $f'(c) = 0$, o sea que es paralela al eje X.

Prueba del teorema de Rolle.

Vamos a demostrar que existe un c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = 0$.

Puesto que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ (por (1) de la hipótesis), sabemos que tiene un valor máximo absoluto M y un valor mínimo absoluto m en $[a,b]$

$$m \le f(x) \le M \qquad \text{para todo } x \text{ en } [a,b] \qquad (*)$$

Caso I: $\boldsymbol{m = M = 0}$. Entonces de (*) se sigue que $f(x) = 0$ en $a \le x \le b$, luego $f'(x) = 0$ en $a < x < b$. Así, cualquier punto c entre a y b cumple $f'(c) = 0$.

Caso II: Alguno de los valores $\boldsymbol{M}$ o $\boldsymbol{m \ne 0}$. Entonces tomamos uno de estos valores que no sea nulo y lo escribimos en la forma $f(c)$, para algún c tal que $a \le c \le b$.

Observemos que $c \ne a$ y $c \ne b$. En efecto, sabemos que $f(a) = f(b) = 0$; (por (3) de la hipótesis) y $f(c) \ne 0$.

Luego $a < c < b$, y

$f(c)$ es un máximo o mínimo relativo (por ser un máximo o mínimo absoluto en el intervalo abierto (a,b)),

y existe $f'(c)$ (por (2) de la hipótesis),

por lo tanto $f'(c) = 0$ (por el teorema 9.9.4 del extremo estacionario).

La prueba del teorema está completa.

EJEMPLO 1. Verificar que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ cumple las condiciones (1), (2) y (3) de la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[-1,2]$ y hallar todos los puntos c tales que $f'(c) = 0$ y $-1 < c < 2$.

SOLUCION. Puesto que $f(x)$ es una función polinomial, es continua y diferenciable en todo punto x. Luego $f(x)$ satisface las condiciones (1) y (2) del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,2]$.

Puesto que $f(-1) = 0 = f(2)$, esta función también satisface la condición (3).

Luego por el teorema de Rolle existe un punto c tal que

$$f'(c) = 0 \qquad \text{y} \qquad -1 < c < 2.$$

Las raíces de la ecuación $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 0$ son

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \approx \frac{2 \pm 2.65}{3} = 1.55, \ -0.22,$$

y estos dos valores se encuentran en el intervalo abierto $(-1, 2)$.

Así, $f'(c) = 0$ para $c = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{2}$.

EJEMPLO 2. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)(x-3)(x-4)$. Probar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

SOLUCION. Puesto que $f(x)$ es una función polinomial, es continua y diferenciable en todo x. Además se tiene $f(-2) = f(-1) = f(3) = f(4) = 0$ evaluando directamente en la función dada. Luego se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x)$ en cada uno de los tres intervalos cerrados $[-2, -1]$, $[-1, 3]$, $[3, 4]$.

Por lo tanto, por el teorema de Rolle,

existe c_1 tal que $f'(c_1) = 0$ y $-2 < c_1 < -1$,

existe c_2 tal que $f'(c_2) = 0$ y $-1 < c_2 < 3$ y

existe c_3 tal que $f'(c_3) = 0$ y $3 < c_2 < 4$,

Luego la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raíces reales $x = c_1, c_2, c_3$.

10.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

Sea $f(x)$ una función tal que

(1) es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$,

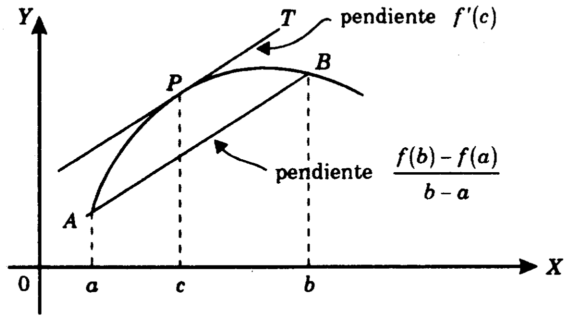
(2) es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretación geométrica.

En algún punto P de la curva sobre el intervalo abierto (a, b) la recta tangente T es paralela al segmento AB.



La figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ que satisface las condiciones (1) y (2). El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c entre a y b, tal que la recta tangente T a la curva $f(x)$ en el punto $P = (c, f(c))$ es paralela al segmento AB, que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$, y cuya pendiente es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Nota.

(1) La fórmula $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ también se escribe $f(b)-f(a) = f'(c).(b-a)$

(2) El teorema de Rolle aparece como un caso particular del teorema del valor medio. En efecto, si se tiene $f(a) = f(b) = 0$, entonces el teorema del valor medio nos da $f'(c) = \dfrac{0}{b-a} = 0$, que es la conclusión del teorema de Rolle.

Para probar el teorema del valor medio nos valdremos del teorema de Rolle que ya ha sido establecido en 10.1 .

PRUEBA DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

Definimos la función $F(x)$ mediante la ecuación

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \qquad (*)$$

y demostraremos que esta función satisface las tres condiciones de las hipótesis del teorema de Rolle:

i) *La función* $F(x)$ *es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$, ya que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ (por la hipótesis (1) del teorema) y $-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ es continua en $[a,b]$ (por ser una función polinomial en la variable x)

ii) *La función* $F(x)$ *es diferenciable en el intervalo abierto* (a,b), ya que

$f(x)$ es diferenciable en (a,b) (por la hipótesis (2) del teorema)

y $-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ es diferenciable en (a,b)

(por ser una función polinomial en la variable x).

iii) $F(a)=F(b)=0$, pues

$$F(a) = f(a)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a) = 0$$

$$F(b) = f(b)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a) = 0$$

Así, $F(x)$ cumple las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle, y por lo tanto, existe un número c tal que $F'(c)=0$ y $a<c<b$.

Luego, derivando ambos miembros de (*) y evaluando en $x=c$ resulta

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1) ,$$

pues $(f(a))' = 0$ ya que $f(a)$ es constante.

Y, finalmente, despejando $f'(c)$ obtenemos $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, para algún c tal que $a<c<b$.

Y esto es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO 1. Verificar que la función $f(x)=x-x^3$ cumple la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-2,1]$ y hallar los valores c tales que $f'(c) = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$ y $-2<c<1$.

SOLUCION. Puesto que $f(x)$ es una función polinomial es continua y diferenciable en todo x, en particular lo es en el intervalo dado.

Hallamos las raíces de la ecuación.

$$f'(x) = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} \quad \text{o} \quad 1-3x^2 = \frac{0-6}{3} = -2 \quad \text{luego} \quad x = \pm 1.$$

De donde $c = -1$ es el único valor que cumple $-2 < -1 < 1$.

EJEMPLO 2. Usando el teorema del valor medio probar la fórmula

$$\cos(x+h) - \cos x = -h \operatorname{sen} c\,, \quad \text{para algún } c \text{ tal que} \quad x < c < x+h.$$

SOLUCION. La función $\cos x$ es continua y diferenciable en todo x y podemos aplicar el teorema del valor medio a esta función en el intervalo cerrado $[a,b]$ donde $a = x$, $b = x+h$. Se tiene entonces que existe un número c tal que $a < c < b$ y

$$\cos b - \cos a = \cos'(c).(b-a) \quad \text{o} \quad \cos(x+h) - \cos x = -\operatorname{sen}(c).h = -h\operatorname{sen}(c).$$

EJEMPLO 3. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f'(x) = 1$ en $a < x < b$. Probar que $f(x) = f(a) + x - a$ para todo x en $[a,b]$.

SOLUCION. Fijemos x tal que $a < x \le b$. Entonces la función $f(x)$ cumple la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[a,b]$, y por lo tanto, existe un número c tal que

$$f(x) = f(a) + f'(c).(x-a) = f(a) + x - a \qquad (\text{pues } f'(c) = 1)$$

Por otra parte, cuando $x = a$ la igualdad se verifica evidentemente.

Así, se tiene $\qquad f(x) = f(a) + x - a \;$ en $\; a \le x \le b$.

10.2.1 TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f(x)$ una función y n es un entero positivo tal que

1) $f^{(n-1)}(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$

y 2) existe $f^{(n)}(x)$ en el intervalo (a, b)

Entonces existe c en (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

Nota.

1. Si $n = 1$, el resultado implica el teorema del valor medio.
2. El teorema establece que el valor de $f(b)$ puede ser aproximado por

$$P(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1},$$

y que la diferencia $f(b) - P(b)$ puede ser estimada en términos de la función $f^{(n)}(x)$.

10.3 TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

(1) son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$,

(2) son diferenciables en el intervalo abierto (a,b) y

(3) $g'(x) \neq 0$ en $a < x < b$.

Entonces existe un número c entre a y b tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Nota.

(1) Este resultado constituye, en verdad, una generalización del teorema del valor medio (teorema 10.2). En efecto, la fórmula anterior es la conclusión del teorema del valor medio si ponemos $g(x) = x$, pues entonces resulta $g'(c) = 1$, $g(b) = b$ y $g(a) = a$.

(2) Observamos que la hipótesis $g'(x) \neq 0$ implica $g(b) - g(a) \neq 0$, pues por el teorema del valor medio

$$g(b) - g(a) = g'(d)(b-a) \neq 0 \quad ,$$

ya que $g'(d) \neq 0$ y $b \neq a$.

PRUEBA. Aplicamos el teorema de Rolle a la nueva función

$$h(x) = [f(b) - f(a)].[g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)].[f(x) - f(a)].$$

Tenemos $\quad h(a) = h(b) = 0 \quad$ y

$$h'(x) = [f(b)-f(a)].g'(x) - [g(b)-g(a)].f'(x)$$

Luego existe un número c entre a y b tal que

$$h'(c)=0 \qquad \text{o} \qquad [f(b)-f(a)].g'(c)-[g(b)-g(a)].f'(c)=0$$

de donde
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO. Si $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$, hallar todos los números c entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$

tales que
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g\left(\frac{3\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)} .$$

SOLUCION. Resolvemos la ecuación

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g\left(\frac{3\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)} ,$$

$$\frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 0$$

o $$\operatorname{ctg} x = 0 .$$

Luego $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, donde $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, de los cuales solamente $\frac{\pi}{2}$ se encuentra entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

10.4 TEOREMA DE LA FUNCION CONSTANTE.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces $f'(x)=0$ en $a<x<b$ si y sólo si $f(x)=C$, donde C es una constante.

PRUEBA.

(1) Supongamos que $f'(x)=0$ en $a<x<b$. Probaremos que $f(x)=f(a)=$*constante*, para todo x en $[a,b]$.

En efecto, si x es un número tal que $a<x\leq b$ la función $f(x)$ satisface las condiciones (1) y (2) del teorema del valor medio en el intervalo $[a,x]$, y por lo tanto, existe un número c tal que

$$f(x)-f(a) = f'(c)(x-a)\,, \qquad a<c<x$$

Puesto que por hipótesis se tiene $f'(c)=0$, resulta

$$f(x)-f(a) = 0.(x-a)$$

o

$$f(x) = f(a),$$

que es lo que queríamos demostrar.

(2) Recíprocamente, si $f(x)=C=$*constante*, entonces sabemos que $f'(x)=0$.

10.4.1 TEOREMA DE LA DIFERENCIA CONSTANTE.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces $f'(x)=g'(x)$ en $a<x<b$ si y sólo si $f(x)=g(x)+C$, donde C es una constante.

PRUEBA.

(1) Si $f'(x) = g'(x)$ en $a<x<b$, entonces

$$\left(f(x)-g(x)\right)' = 0 \text{ en } a<x<b\,,$$

y por el teorema de la función constante $f(x)-g(x)=C=$ *constante.*

(2) Si $f(x) = g(x)+C$, donde C es una constante, entonces derivando resulta $f'(x) = g'(x)$.

Nota. El teorema de la diferencia constante tiene un carácter fundamental en el Análisis Matemático, especialmente en:

(1) la noción de la *integral indefinida* o *antiderivada*,

(2) la conexión que existe entre la integral indefinida y la integral definida, y

(3) la resolución de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO. Hallar una función $y = y(x)$ tal que

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+5}} \qquad \text{y} \qquad y(1) = 0.$$

SOLUCION.

$$y' = \left[\tfrac{3}{4}\left(x^2+2x+5\right)^{2/3}\right]$$

Luego, por el teorema de la diferencia constante

$$y = \tfrac{3}{4}\left(x^2+2x+5\right)^{2/3} + C \,, \qquad \text{donde } C \text{ es una constante.}$$

Puesto que $y(1) = 0$, haciendo $x = 1$ calculamos el valor de C

$$0 = \tfrac{3}{4}(4) + C \,, \qquad \text{de donde} \quad C = -3 \,.$$

10.5 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Para la función $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3$ determinar tres intervalos $[a,b]$ tales que se cumplan las condiciones (1), (2) y (3) del teorema de Rolle. Luego hallar un número c en cada intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

SOLUCION. Puesto que $f(x)$ es una función polinomial, las condiciones (1) y (2) del teorema de Rolle se verifican sobre cualquier intervalo cerrado.

Por simple inspección vemos que $x = -3$ es una raíz de la ecuación

$$f(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3 = 0.$$

Por lo tanto $\quad 4x^3 + 12x^2 - x - 3 = (x+3)\left(4x^2 - 1\right) = 0$,

y las otras raíces son $x = \pm\frac{1}{2}$.

Luego la condición (3) del teorema de Rolle se cumple en cada uno de los intervalos cerrados

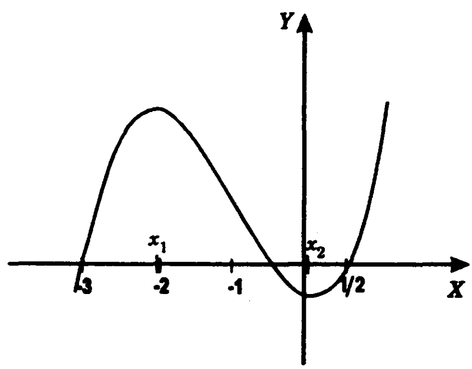
$$\left[-3,-\tfrac{1}{2}\right], \quad \left[-3,\tfrac{1}{2}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right].$$

Resolviendo la ecuación $\quad f'(x) = 12x^2 + 24x - 1 = 0$

se obtienen las raíces $\quad x_1 = \frac{-6-\sqrt{39}}{6} \approx -2.01 \quad$ y $\quad x_2 = \frac{-6+\sqrt{39}}{6} \approx 0.04$.

Luego x_1 se encuentra en los intervalos abiertos $\left(-3,-\tfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-3,\tfrac{1}{2}\right)$, y cumple $f'(x_1)=0$,

x_2 se encuentra en los intervalos abiertos $\left(-3,\tfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$, y cumple $f'(x_2)=0$.



PROBLEMA 2. Probar que $\sqrt[n]{1+x} < 1+\dfrac{x}{n}$ para $x>0$ y $n = 2, 3, ...$

SOLUCION. Tomemos $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$.

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x)$ en el intervalo $[0, x]$, vemos que existe un número c entre 0 y x tal que

$$f(x)-f(0) = f'(c).(x-0)$$

Luego $$\sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1}{n[1+c]^{\frac{n-1}{n}}} \cdot x \qquad \textbf{(A)}$$

Además, de $c>0$ se sigue que $\quad 1+c>1$, $\qquad (1+c)^{n-1}>1,$

$$[1+c]^{\frac{n-1}{n}}>1 , \qquad \frac{1}{[1+c]^{\frac{n-1}{n}}}<1 ,$$

y por lo tanto el segundo miembro de (A) es menor que x/n .

Así resulta $\sqrt[n]{1+x} < 1+\dfrac{x}{n}$, que es lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 3. Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable sobre un intervalo abierto. Probar que si $f(a)=f(b)=f(c)$, donde $a<b<c$ son tres puntos del intervalo, entonces existe un número d entre a y c tal que $f''(d)=0$.

SOLUCION. Aplicamos el teorema del valor medio a la función $f(x)$ en los intervalos cerrados $[a,b]$ y $[b,c]$ sucesivamente. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= f(b)-f(a) = f'(c_1)(b-a) , && \text{para algún } c_1 \text{ entre } a \text{ y } b, \\ 0 &= f(c)-f(b) = f'(c_2)(c-b) , && \text{para algún } c_2 \text{ entre } b \text{ y } c, \end{aligned}$$

de donde $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, con $a<c_1<b<c_2<c$.

Y de nuevo por el teorema del valor medio, pero ahora aplicado a la función $f'(x)$ en el intervalo cerrado $[c_1, c_2]$, resulta

$$0 = f(c_2)-f'(c_1) = f''(d)(c_2-c_1) , \quad \text{para algún } d \text{ entre } c_1 \text{ y } c_2 .$$

Luego $f''(d)=0$ y $a<d<c$.

PROBLEMA 4. Usando el teorema de la diferencia constante resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = 2\cos x+3x^2-1 \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

SOLUCION. Tenemos $\qquad y' = 2\cos x+3x^2-1 = \left(2\operatorname{sen} x+x^3-x\right)'$,

luego por el teorema de la diferencia constante (10.4.1)

$$y = 2\operatorname{sen} x+x^3-x+C ,$$

donde C es una constante. Para hallar C evaluamos esta condición cuando $x = 0$

$$y(0) = C$$
$$5 = C\,.$$

PROBLEMA 5. Probar que $\operatorname{sen} x \leq x$ para todo $x \geq 0$.

SOLUCION. Para $x = 0$ se cumple $0 = \operatorname{sen} 0 \leq 0$.

Supongamos pues que $0 < x$. Aplicamos el teorema del valor medio a la función $h(x) = \operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, x]$: Existe un número c tal que

$$h(x) - h(0) = h'(c)(x - 0)$$

y $\quad 0 < c < x$.

Pero de $\quad h(x) = \operatorname{sen} x - x$ se sigue $h(0) = 0$

y $\quad h'(c) = \cos c - 1$, y

por lo tanto $\quad \operatorname{sen} x - x = (\cos c - 1)x \leq 0$,

pues $\quad \cos c - 1 \leq 0$ y $0 < x$.

Así resulta $\quad \operatorname{sen} x \leq x$ para todo $x \geq 0$.

PROBLEMA 6. Si $f(x) = x^{5/3} + x^{4/3}$ hallar todos los números c entre -8 y 8 tales que $f'(c) = \dfrac{f(8) - f(-8)}{8 - (-8)}$.

SOLUCION. Resolviendo la ecuación

$$f'(x) = \frac{f(8) - f(-8)}{8 - (-8)}$$

$$\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{32 - 16}{16}$$

$$5\left(x^{1/3}\right)^2 + 4x^{1/3} - 3 = 0\,, \qquad \text{de donde} \qquad x^{1/3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{5}$$

y

$$x = \left(\frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{5}\right)^3 .$$

Un simple cálculo muestra que solamente el valor con signo + se encuentra entre -8 y 8 .

PROBLEMA 7. Hallar un punto de la parábola $y = x^2$ en el que la recta tangente sea paralela a la cuerda AB, donde $A = (1, 1)$ y $B = (3, 9)$.

SOLUCION. Debemos resolver la ecuación

$$y'(x) = \textit{pendiente de } AB$$

$$2x = \frac{9-1}{3-1} .$$

Luego $x = 2$, $y = 4$.

PROBLEMA 8. La función $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2} - 4$ toma el valor cero $f(0) = f(16) = 0$ en los puntos extremos del intervalo cerrado $[0, 16]$. ¿Se cumple el teorema de Rolle para esta función en $[0, 16]$?

SOLUCION. Hallamos las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$

$$\tfrac{2}{3}(x-8)^{-1/3} = 0$$

$$\frac{2}{3(x-8)^{1/3}} = 0 ,$$

de donde vemos que la ecuación no tiene raíces y, por lo tanto, no existe ningún número c tal que $f'(c) = 0$.

Luego no se cumple el teorema de Rolle para $f(x)$ en $[0, 16]$. Ello se debe a que no existe $f'(x)$ en $x = 8$, y por consiguiente, la función no satisface la condición (2) de la hipótesis del teorema de Rolle.

PROBLEMA 9. Probar que la función $\operatorname{tg} x$ es creciente en el intervalo abierto $-\pi/2 < x < \pi/2$. Esto es, si $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \pi/2$, entonces $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

SOLUCION. Aplicamos el teorema del valor medio a la función $\operatorname{tg} x$ en el intervalo cerrado $x_1 \le x \le x_2$. Luego existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 &= \operatorname{tg}'(c)(x_2 - x_1) \\ &= \sec^2(x)(x_2 - x_1) . \end{aligned}$$

Ahora bien, $\sec^2(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, y por lo tanto

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0 \qquad \text{o} \qquad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$$

que es lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 10. Probar que si $f'(x) \neq 0$ para todo x, entonces $f(x) = 0$ tiene a lo más una raíz.

SOLUCION. Por reducción al absurdo, supongamos que $f(x) = 0$ tuviera al menos dos raíces, digamos $x_1 < x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Entonces aplicando el teorema de Rolle encontraríamos un número c entre x_1 y x_2 tal que $f'(c) = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $f(x) = 0$ tiene a lo más una raíz.

PROBLEMA 11. Si $f(x) = x^4 + 4x$ y $g(x) = x^2 + 2x$, encontrar todos los números c entre -1 y 2 tales que $\dfrac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

SOLUCION. Resolviendo la ecuación

$$\frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{o} \qquad \frac{24 - (-3)}{8 - (-1)} = \frac{4x^3 + 4}{2x + 2} ,$$

$$3 = \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 2(x^2 - x + 1)$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ , de donde resulta } \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} .$$

Es fácil ver que estos valores se encuentran entre -1 y 2 .

PROBLEMA 12. Hallar un valor c que cumpla las condiciones del teorema del valor medio generalizado para las funciones

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 4x + 6$$

en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

SOLUCION. Resolviendo la ecuación

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} \quad \text{o} \quad \frac{2x+2}{2x-4} = \frac{0-(-3)}{3-6}, \quad \text{de donde } x = 1/2 .$$

Puesto que $1/2$ se encuentra entre 0 y 1, dicho valor cumple las condiciones del teorema del valor medio generalizado.

PROBLEMA 13. Demostrar por medio del teorema de Rolle que la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$$

tiene al menos una raíz real en el intervalo abierto $(0, 1)$.

SOLUCION. En primer lugar, buscamos una función $f(x)$ cuya derivada sea la función dada $$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 .$$

Podemos tomar $$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x .$$

Esta función es continua y diferenciable en todo punto x; y además, cumple $f(0) = f(1) = 0$. Luego satisface la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[0, 1]$, y por lo tanto, existe un número c entre 0 y 1 tal que

$$f'(c) = 0$$

o sea $$4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = 0 .$$

Así, c es una raíz tal que $0 < c < 1$.

PROBLEMA 14. Demostrar que $x^3 + px + q = 0$ no puede tener más de una raíz real si $p > 0$.

SOLUCION. Supongamos que $f(x) = x^3 + px + q$ tuviera dos raíces reales $x_1 < x_2$. O sea $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Entonces, por el teorema de Rolle, existiría un número real c entre x_1 y x_2 tal que

$$f'(c) = 0 .$$

Pero $$f'(c) = 3c^2 + p > 0 \quad \text{si} \quad p > 0 \text{ ya que } c^2 \geq 0 .$$

Así, hemos obtenido una contradicción al haber supuesto que existen dos raíces reales. Por lo tanto la ecuación $x^3 + px + q = 0$ no puede tener más de una raíz real si $p > 0$.

PROBLEMA 15. Usando el teorema de Rolle e inducción matemática, probar que todo polinomio de grado n no puede tener más de n raíces reales distintas.

SOLUCION. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y $a_n \neq 0$.

(1) Para $n = 1$, se tiene $p(x) = a_1 x + a_0$, que posee una sola raíz $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$. Por lo tanto se cumple el resultado para $n = 1$.

(2) *Supongamos ahora, por inducción, que todo polinomio de grado* $n-1$, *donde* $n > 1$, *tiene a lo más* $n-1$ *raíces reales distintas. Probaremos entonces que* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *no puede tener más de* n *raíces reales distintas.*

Procederemos por reducción al absurdo. Si $p(x)$ tuviese $n+1$ raíces distintas $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$:

$$p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = p(x_{n+1}) = 0 ,$$

entonces se cumpliría el teorema de Rolle para $p(x)$ en cada intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_n, x_{n+1}]$, y por lo tanto, existirían números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\begin{cases} f'(c_1) = 0 & \text{y} \quad x_1 < c_1 < x_2 \\ f'(c_2) = 0 & \text{y} \quad x_2 < c_2 < x_3 \\ \quad \vdots \;\; = & \;\vdots \qquad\quad \vdots \\ f'(c_n) = 0 & \text{y} \quad x_n < c_n < x_{n+1} , \end{cases}$$

de donde resultaría que el polinomio

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 ,$$

de grado $n-1$, tendría n raíces distintas $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Esto es una contradicción con la hipótesis inductiva de que todo polinomio de grado $n-1$ no puede tener más de $n-1$ raíces distintas. Concluimos, pues, que el polinomio $p(x)$ de grado n tiene a lo más n raíces distintas.

PROBLEMA 16. Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$ y $f(1) = 0$. Probar que se cumple $f(xy) = f(x) + f(y)$.

SOLUCION. Fijemos un $y > 0$. Sea $u = xy$. Entonces por la regla de la cadena tenemos $\frac{d}{dx} f(u) = \frac{df}{du}(u) \cdot \frac{du}{dx}$,

$$\frac{d}{dx} f(xy) = \frac{1}{u} . y = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} f(x) ,$$

y por el teorema de la diferencia constante (10.4.1):

$$f(xy) = f(x) + C ,$$

donde C es una constante.

Haciendo $x = 1$ resulta $f(y) = f(1) + C = C$ (pues $f(1) = 0$), luego $f(xy) = f(x) + f(y)$ que era lo que queríamos demostrar.

10.6 REGLA DE L' HÔSPITAL. Evaluación de formas indeterminadas.

Decimos que la función $F(x)$ es *indeterminada o toma una forma indeterminada en* $x = a$ si al evaluar $F(x)$ en a resulta una de las expresiones :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 . \infty , \quad \infty - \infty , \quad 0^0 , \quad \infty^0 , \quad 1^\infty .$$

Tales expresiones reciben el nombre de *formas indeterminadas.*

EJEMPLOS.

(1) La función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = 0$.

(2) La función $\frac{(x-1)^{-2/3}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}$ toma la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ en $x = 1$.

(3) La función $\sec x - \operatorname{tg} x$ toma la forma indeterminada $\infty - \infty$ en $x = \pi/2$.

(4) La función $(1 + 2x)^{1/x}$ toma la forma indeterminada 1^∞ en $x = 0$.

En muchos casos en los que una función $F(x)$ toma una forma indeterminada en un punto a, es posible evaluar $\lim\limits_{x \to a} F(x)$, o los límites laterales $\lim\limits_{x \to a^+} F(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} F(x)$.

Por ejemplo, la regla de L'Hôspital, que pasamos a establecer, proporciona un método muy simple para calcular tales límites.

REGLA DE L'HÔSPITAL PARA $\frac{0}{0}$ Y $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en $0<|x-a|<\delta$ tales que

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (esto es, cuando $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$),

o

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (esto es, cuando $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{\infty}{\infty}$),

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista.

NOTA.

(1) Las pruebas de la regla de L'Hôspital para cada caso $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, se dan en los problemas resueltos 1 y 2, respectivamente.

(2) La regla de L'Hôspital para las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, sigue siendo válida si se consideran límites laterales o límites al infinito :

(2.1) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(2.2) $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(2.3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(2.4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(3) Puede ocurrir que el cociente $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ de lugar a una forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ en $x = a$, entonces se aplica de nuevo la regla de L'Hôspital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

siempre que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ exista.

En la práctica se aplica la regla tantas veces cuantas sean necesarias hasta obtener un cociente no indeterminado.

EJEMPLO 1. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

SOLUCION. Puesto que $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^3-2x^2-x+2 = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^3-7x+6 = 0$.

por la regla de L'Hôspital tenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\,.\operatorname{tg} x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$ (aplicando dos veces la regla de L'Hôspital)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^3 x+1}{1}$$ (cancelando $\operatorname{sen} x$)

$$= 3.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} = \pi \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{x} = \pi \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sec^2 \dfrac{\pi}{2} x\right)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{1} \qquad \text{(regla de L'Hôspital para } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} .$$

EJEMPLO 4. Encontrar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x}$.

SOLUCION.

Tenemos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} 2(0)}{\ln \operatorname{sen}(0)} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$, indeterminado.

Aplicando la regla de L'Hôspital para $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x}(2\cos 2x)}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}(\cos x)}$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{\cos x}\right)$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\right)(1) = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos 2x} \qquad \text{(regla de L'Hôspital para } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$= 1 .$$

OTRAS FORMAS INDETERMINADAS.

LA FORMA INDETERMINADA $0\times\infty$.

Si $f(x)\times g(x)$ toma la forma indeterminada $0\times\infty$ en $x=a$, o sea cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces la transformación

$$f(x)\times g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \qquad \left(\text{o}\quad f(x)\times g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\right),$$

convierte la forma indeterminada $0\times\infty$ en la forma $\dfrac{0}{0}$ (o $\dfrac{\infty}{\infty}$), y podemos aplicar la regla de L'Hôspital para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$.

EJEMPLO. Hallar $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

SOLUCION. Para $x=1$ se obtiene $0\times\infty$, valor indeterminado.

Tenemos
$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} \qquad \left(\text{forma } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\left(-\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi x}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}.$$

LA FORMA INDETERMINADA $\infty-\infty$. Si una función $f(x)$ toma un valor indeterminado $\infty-\infty$ en $x=a$ y deseamos calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, a menudo es posible escribir $f(x)$ como un cociente de dos funciones transformando la forma indeterminada $\infty-\infty$ en una de las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, a las cuales podemos aplicar la regla de L'Hôspital.

EJEMPLO. Hallar $L=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$.

SOLUCION. Si hacemos $x = 1$ en la función dada, resulta $\infty - \infty$, valor indeterminado.

Tenemos $$L = \lim_{x \to 1} \frac{1 - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}}{6\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^{-2/3} + x^{-1/2}}{-2x^{-2/3} - 3x^{-1/2} + 5x^{-1/6}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{3}x^{-5/3} - \frac{1}{2}x^{-3/2}}{\frac{4}{3}x^{-5/3} + \frac{3}{2}x^{-3/2} - \frac{5}{6}x^{-7/6}} = \frac{1}{12}.$$

FORMAS INDETERMINADAS $0^0,\ 1^{\infty},\ \infty^0$.

Supongamos que deseamos calcular $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ en uno de los siguientes casos :

(1) $f(a) = g(a) = 0$, que da el valor indeterminado $f(a)^{g(a)} = 0^0$;

(2) $f(a) = 1$, $g(a) = \infty$, que da el valor indeterminado $f(a)^{g(a)} = 1^{\infty}$;

(3) $f(a) = \infty$, $g(a) = 0$, que da el valor indeterminado $f(a)^{g(a)} = \infty^0$.

Tomando logaritmo natural tenemos

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to a}\left[\ln f(x)^{g(x)}\right]$$ (pues ln es una función continua)

$$= \lim_{x \to a}\left[g(x) . \ln f(x)\right] = M .$$

El segundo miembro da lugar a una forma indeterminada $0 \times \infty$, y el límite M puede evaluarse por la regla de L'Hôspital.

Finalmente, L se obtiene tomando antilogaritmo natural $L = e^M$, o

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a}\left[g(x) \ln f(x)\right]}$$

EJEMPLO. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} (1 + kx)^{1/x}$.

SOLUCION. Si hacemos $x=0$ reulta 1^{∞}, valor indeterminado.

Tomando logaritmo natural tenemos

$$M = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+kx) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+kx}(k)}{1} = k\ .$$

Luego $L = \lim_{x\to 0} (1+kx)^{1/x} = e^{M} = e^{k}$.

10.7 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Regla de L'Hôspital para $\frac{0}{0}$.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones diferenciables en $0<|x-a|<\delta$ tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, probar que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

si el límite del segundo miembro existe.

SOLUCION. Definimos $f(a)=g(a)=0$ y entonces ambas funciones son continuas en el intervalo abierto $|x-a|<\delta$.

Dado cualquier x tal que $|x-a|<\delta$, por el teorema del valor medio generalizado, aplicado a las dos funciones en el intervalo cerrado de extremos a y x, podemos encontrar un número c entre a y x tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{(pues } f(a)=g(a)=0\text{)}.$$

Ahora bien, cuando $x\to a$ tenemos que $c\to a$, pues c se encuentra siempre entre a y x, y por lo tanto, tomando límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$= \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{(por la observación anterior)}$$

Por lo tanto, si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, tenemos que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

PROBLEMA 2. Regla de L'Hôspital para $\frac{\infty}{\infty}$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones diferenciables en $a < x < a + \delta$ tales que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$. Probar que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, si el límite del segundo miembro existe.

Nota. El resultado es igualmente válido (y la misma prueba sirve con las modificaciones obvias) si se reemplaza $x \to a^+$ por $x \to a^-$ y por lo tanto, también se cumple cuando $x \to a$, que es la versión que hemos dado en el enunciado del teorema de la sección 10.6, asumiendo la condición (2) en la hipótesis.

SOLUCION. Sea $L = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces existe $x_1 > a$ tal que $a < c < x_1$ implica

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

El número x_1 permanece fijo en el argumento que sigue.

Si $a < x < x_1$ aplicamos el teorema del valor medio generalizado a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo cerrado $[x, x_1]$ y encontramos así c entre x y x_1 tal que

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

de donde resulta

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \times h(x), \tag{2}$$

siendo $\qquad h(x) = \dfrac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}$.

Nótese que $h(x)$ satisface $\qquad \lim\limits_{x \to a^+} h(x) = 1$, **(3)**

ya que $f(x)$ y $g(x)$ tienden a $+\infty$, cuando $x \to a^+$, y $f(x_1)$ y $g(x_1)$ son constantes.

Usando (2) tenemos ahora

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f'(c)}{g'(c)} - L + \frac{f'(c)}{g'(c)} . [h(x) - 1] \tag{4}$$

De (1) se tiene $\left| \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \right| \le L + \dfrac{\varepsilon}{2}$ y por (3) existe $\delta_1 > 0$ tal que $a < x < a + \delta_1$ implica $|h(x) - 1| < \dfrac{\varepsilon/2}{L + \varepsilon/2}$.

Finalmente, si tomamos $\delta = \min\{x_1 - a, \delta_1\}$ y empleamos (1) y (4) , vemos que $a < x < a + \delta$ implica

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \le \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \times |h(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así, $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

PROBLEMA 3. Hallar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}}$.

SOLUCION. Si sustituimos $x = 1$ obtenemos $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado. Por la regla de L'Hôspital para $\dfrac{0}{0}$ tenemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-\dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi}{2} x} = \infty .$$

PROBLEMA 4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

SOLUCION. Tenemos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sec^2 3x}{5\sec^2 5x} = \dfrac{3}{5}$.

PROBLEMA 5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg} x$

SOLUCION. Haciendo $x=0$ obtenemos $0\times\infty$, valor indeterminado.

Tenemos
$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sec^2 x} \qquad \text{(Regla de } L'H\hat{o}spital\text{)}$$
$$= \frac{0}{1} = 0 .$$

PROBLEMA 6. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \operatorname{sen}\dfrac{a}{x}$, $n>0$ y $a>0$.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} x^n \operatorname{sen}\frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{x}}{\frac{1}{x^n}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{a}{x}.\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{n.x^{-n-1}} \qquad \left(\text{Regla de L'Hôspital para } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \frac{a}{n}\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{a}{x}}{\frac{1}{x^{n-1}}} = \begin{cases} a & \text{si } n=1 \\ \dfrac{a}{n}\left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty, & \text{si } n>1 \end{cases}$$

PROBLEMA 7. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

SOLUCION. Si hacemos $x=0$ obtenemos $\infty-\infty$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\operatorname{sen} x\cos x}{2x\operatorname{sen}^2 x+2x^2\operatorname{sen} x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} 2x}{2x\operatorname{sen}^2 x+x^2\operatorname{sen} 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\operatorname{sen}^2 x+4x\operatorname{sen} 2x+2x^2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen} 2x}{6\operatorname{sen} 2x+12x\cos 2x-4x^2\operatorname{sen} 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24\cos 2x-32x\operatorname{sen} 2x-8x^2\cos 2x}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 8. Hallar $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$.

SOLUCION. Para $x=a$ obtenemos el valor indeterminado $\dfrac{0}{0}$.

Luego $$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}=\lim_{x\to a}\frac{1}{n\times x^{n-1}}=\frac{1}{n\times a^{n-1}}.$$

PROBLEMA 9. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\operatorname{sen} x}$

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\ \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}2\sec^3 x=2.$$

PROBLEMA 10. Hallar $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$.

SOLUCION. Para $x = a$ resulta $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = \lim_{x\to a} \frac{3x^2 - 2ax - a^2}{2x} = \frac{3a^2 - 2a^2 - a^2}{2a} = 0 .$$

PROBLEMA 11. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{16x - x^4} - 2\sqrt[3]{4x}}{2 - \sqrt[4]{2x^3}}$.

SOLUCION. Si $x = 2$ resulta $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{16x - x^4} - 2\sqrt[3]{4x}}{2 - \sqrt[4]{2x^3}} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(16x - x^4\right)^{-1/2}.\left(8 - 2x^3\right) - (4x)^{-2/3}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)}{-\left(2x^3\right)^{-3/4}\left(\frac{3}{2}x^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(-8) - \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}\right)}{-\frac{1}{8}(6)} = \frac{32}{9} .$$

PROBLEMA 12. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$.

SOLUCION. Para $x = 0$ resulta $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \,.\, \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}{6\operatorname{sen} x \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^3 x + 1}{6\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ,$$

aplicando dos veces la regla de L'Hôspital.

PROBLEMA 13. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

PROBLEMA 14. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x + x^2 - 2}{2x^4}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + x^2 - 2}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x + 2x}{8x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{24} = \frac{1}{24}.$$

PROBLEMA 15. Hallar los límites a los que tienden las raíces de la ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bx + C = 0$, si A tiende a 0 y los coeficientes B y C permanecen constantes, $B \neq 0$.

SOLUCION. Las raíces de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Luego $\lim\limits_{A\to 0} x_1 = \infty$

y $$\lim_{A\to 0} x_2 = \lim_{A\to 0} \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \lim_{A\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(B^2 - 4AC\right)^{-1/2} . (-4C)}{2}$$

(derivando respecto de A; B y C permanecen constantes)

$$= -\frac{C}{|B|}.$$

PROBLEMA 16. Hallar $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$.

SOLUCION.

Para $x = \dfrac{\pi}{4}$ resulta $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado.

Tenemos

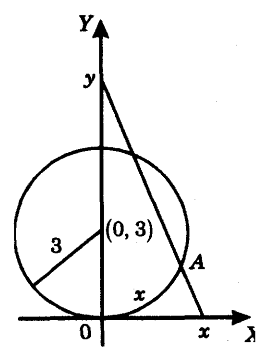
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2\operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2 x\ \operatorname{tg} x - 2\sec^2 x}{-4\operatorname{sen} 4x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x - 2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{-16\cos 4x}$$

$$= \frac{4(2)(1) + 2(2)^2 - 2(2)(1)}{-16(-1)}$$

$$= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

PROBLEMA 17. Sea un círculo con centro en $(0,3)$ y radio 3.



En la figura se tiene:

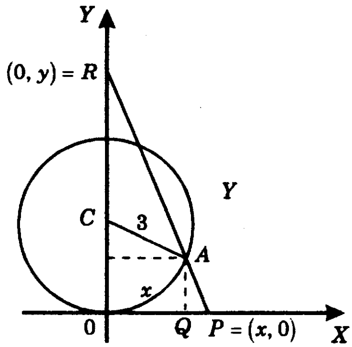
x = arco $\overset{\frown}{AO}$,

y = ordenada del punto de intersección del eje Y con la recta que pasa por $(x,0)$ y A.

Hallar la posición límite de y cuando x se aproxima a cero.

SOLUCION. En la figura siguiente, por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QP}} \qquad (1)$$



$$\text{Pero}\left\{\begin{array}{l} \measuredangle OCA \text{ en radianes} = \dfrac{x}{3} \\ \overline{OR} = y\,, \\ \overline{OP} = x\,, \\ \overline{QA} = \overline{OC} - \overline{AC}\,\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \\ \qquad = 3 - 3\cos\left(\dfrac{x}{3}\right), \\ \overline{QP} = \overline{OP} - \overline{OQ} = x - 3\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right). \end{array}\right.$$

Luego sustituyendo en (1)

$$\frac{y}{x} = \frac{3 - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{x - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)} \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{3x - 3x\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{x - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}$$

Debemos hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} y$, pues x se aproxima a 0 por la derecha.

Haciendo $x = 0$ se obtiene $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x - 3x\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{x - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3 - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + x\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{9}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{1}{9}\cos\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9\,.$$

PROBLEMA 18. Hallar $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

SOLUCION. Si $x=\dfrac{\pi}{2}$ resulta $\dfrac{\infty}{\infty}$, valor indeterminado.

Luego tenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\times\frac{\cos x}{\cos 3x} = \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\right]\times\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}\right]$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{3\operatorname{sen} 3x} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 19. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg} x) \sec 2x$.

SOLUCION. Haciendo $x=\dfrac{\pi}{4}$ se obtiene $0\times\infty$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg} x)\sec 2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 x}{-2\operatorname{sen} 2x} = \frac{2}{2} = 1 .$$

PROBLEMA 20. Encontrar $\lim\limits_{x\to a} \left(a^2-x^2\right) \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$.

SOLUCION. Para $x=a$ resulta $0\times\infty$, valor indeterminado. Tenemos

$$\lim_{x\to a} \left(a^2-x^2\right) \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = \lim_{x\to a} \frac{a^2-x^2}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-2x}{-\dfrac{\pi}{2a}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\dfrac{\pi}{2a}(1)} = \frac{4a^2}{\pi}$$

PROBLEMA 21. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \ln x}{x \ln x}$.

SOLUCION. Para $x = \infty$ tenemos $\dfrac{\infty}{\infty}$, valor indeterminado. Luego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

PROBLEMA 22. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{a}{x}$.

SOLUCION. Para $x = \infty$ obtenemos $\infty \times 0$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{a}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\cos \dfrac{a}{x}\right)\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}} = a .$$

PROBLEMA 23. Encontrar $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}\right]$.

SOLUCION. Para $x = 0$ resulta $\infty - \infty$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x\,(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x\,(1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2} .$$

PROBLEMA 24. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \operatorname{tg} x}\right]$

SOLUCION. Para $x = 0$ resulta $\infty - \infty$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\,\mathrm{tg}\,x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-x}{x^2\,\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{2x\,\mathrm{tg}\,x+x^2\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x\,\mathrm{sen}\,x\cos x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,\mathrm{sen}\,2x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,2x+2x\cos 2x+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{4\cos 2x-4x\,\mathrm{sen}\,2x+2}$$

$$=\frac{2}{4-0+2}=\frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 25. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\,(1+\mathrm{sen}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

SOLUCION. Para $x=0$ obtenemos 1^{∞}, valor indeterminado.

Escribimos $y=(1+\mathrm{sen}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}$. Tomando logaritmo natural tenemos

$$\ln y=\mathrm{ctg}\,x.\ln(1+\mathrm{sen}\,x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\mathrm{ctg}\,x\,.\ln(1+\mathrm{sen}\,x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{sen}\,x)}{\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\mathrm{sen}\,x}(\cos x)}{\sec^2 x}=1.$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0} y = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^1=e$.

PROBLEMA 26. Encontrar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{sen}\,x}$.

SOLUCION. Para $x=0$ resulta ∞^0, valor indeterminado.

Sea $$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{sen}\,x}.$$

Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \ \operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)(\operatorname{tg} x) = 1(0) = 0 .$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0} y = e^{\lim\limits_{e\to 0} \ln y} = e^0 = 1.$

PROBLEMA 27. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} x^{\left(\frac{3}{4+\ln x}\right)}$.

SOLUCION. Para $x=0$ se obtiene 0^0 , valor indeterminado.

Sea $y = x^{\left(\frac{3}{4+\ln x}\right)}$. Tenemos $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{4+\ln x} \ln x = 3 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3.$

Luego $\lim\limits_{x\to 0} y = e^3.$

PROBLEMA 28. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

SOLUCION. Si $x=1$ se obtiene 1^∞ , valor indeterminado.

Sea $y = (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. Tenemos

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2-x}(-1)}{-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} .$$

Luego $\lim\limits_{x\to 1} y = e^{2/\pi}$.

PROBLEMA 29. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{2x} + 3x\right)^{\frac{1}{4x}}$.

SOLUCION. Para $x=0$ resulta 1^∞, valor indeterminado.

Sea $y = \left(e^{2x} + 3x\right)^{\frac{1}{4x}}$. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4x} \ln\left(e^{2x} + 3x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x}}{4} = \frac{5}{4}.$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0} y = e^{5/4}$

PROBLEMA 30. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

SOLUCION. Tenemos la forma indeterminada 1^{∞} cuando $x = 1$.

Sea $y = x^{\frac{1}{1-x}}$. Luego $\lim\limits_{x\to 1} \ln y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} \ln x = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x}{-1} = -1$

y por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} y = e^{-1}$.

PROBLEMA 31. Probar el teorema de Taylor (10.2.1)

SOLUCION. Definimos el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n-1$ mediante

$$P(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

y la función $g(x) = f(x) - P(x) - M(x-a)^n, \quad a \leq x \leq b$ **(1)**

en donde M es elegido de manera que $g(b) = 0$, esto es

$$M = \frac{f(b) - P(b)}{(b-a)^n} \qquad \textbf{(2)}$$

Despejando $f(b)$ de (2) se tiene

$$f(b) = P(b) + M(b-a)^n = f(a) + \ldots + f^{(n-1)}(a)/(n-1)! + M(b-a)^n$$

y debemos probar quie existe c en (a, b) tal que $M = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Usando las hipótesis, 1) y 2) se sigue que para $k = 1, \dots, n-1$ son continuas las derivadas

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x) - k!\,M\,(x-a)^{n-k}$$

en $[a,b]$ y existe $g^{(n)}(x) = f(x) - n!\,M$, en (a,b).

Además, de $P(a) = f(a), \dots, P^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a)$, se tiene

$$g(a) = g^{(1)}(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0$$

Puesto que $g(a) = g(b) = 0$, por el teorema de Rolle, existe b_1 en (a,b) tal que $g^{(1)}(b_1) = 0$. Ahora usamos $g^{(1)}(a) = g^{(1)}(b_1) = 0$ y otra vez el teorema de Rolle para hallar b_2 en (a,b_1) tal que $g^{(2)}(b_2) = 0$. Repitiendo este proceso n veces, encontramos $c = b_n$ en (a,b_{n-1}) tal que $g^{(n)}(c) = 0$.

Puesto que $a \le c = b_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < b$, el número c se halla en el intervalo (a,b), y de $0 = g^{(n)}(c) = f^{(n)}(n) - n!\,M$ se tiene $M = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$, lo que prueba el teorema de Taylor.

PROBLEMA 32. Si $f(x)$ tiene derivadas de todos los ordenes que son acotadas por K en el intervalo (a,b), esto es, se cumple

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < K \quad \text{para todo } x \text{ en } (a,b) \text{ y } n \text{ entero} \ge 0,$$

y $x_0 \in (a,b)$, probar que $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, para todo x en (a,b)

es decir $f(x)$ es la suma de la serie del segundo miembro (llamada serie de Taylor de f en x_0).

SOLUCION. Sea $\displaystyle s_n = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$

Por el teorema de Taylor $\displaystyle \left|f(x) - s_n\right| = \frac{\left|f^{(n)}(c)\right|}{n!}\left|x-x_0\right|^n$,

para algún c entre x y x_0.

Luego $\quad \left| f(x) - s_n \right| \le K \dfrac{\left| x - x_0 \right|^n}{n!}$

y como la sucesión del segundo miembro tiende a cero cuando $n \to \infty$ se sigue $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$, y por lo tanto la serie es convergente y su suma es $f(x)$.

PROBLEMA 33. Probar que $\operatorname{sen}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para todo x.

SOLUCION.

Si $\quad n = 2m$, $\quad \operatorname{sen}^{(n)}(x) = (-1)^m \operatorname{sen}(x)$;

y si $\quad n = 2m + 1$, $\quad \operatorname{sen}^{(n)}(x) = (-1)^m \cos(x)$;

luego se cumple $\quad \left| \operatorname{sen}^n(x) \right| \le 1$, para todo x y entero $n \ge 0$.

y por el problema 32, con $x_0 = 0$, se tiene

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^{(n)}(0) \frac{(x-0)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \times \frac{x^{(2m+1)}}{(2m+1)!}$$

pues $\operatorname{sen}^{(n)}(0) = 0$ si n es par, y $\operatorname{sen}^{(n)}(0) = (-1)^m$, si $n = 2m + 1$.

10.8 PROBLEMAS PROPUESTOS.

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$.

PROBLEMA 2. Hallar $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi - 2x)^2}$.

PROBLEMA 3. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + \sec x - 1}{\operatorname{tg} x - \sec x + 1}$.

PROBLEMA 4. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

PROBLEMA 5. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

PROBLEMA 6. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

PROBLEMA 7. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec 5x - \operatorname{tg} x)$.

PROBLEMA 8. Encontrar $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x} - \dfrac{1}{x^3}\right]$.

PROBLEMA 9. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{2}{x}\right)^{3x^2}$.

PROBLEMA 10. Encontrar $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2} \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

RESPUESTAS.

1. 8/69	**2.** $-1/8$	**3.** 1	**4.** $-1/3$	**5.** 1
6. 1	**7.** ∞	**8.** ∞	**9.** e^{-6}	**10.** $-4/\pi$.

10.9 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES.

Definición.

(1) Decimos que una función $f(x)$ es *creciente* en un intervalo si se cumple que

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \textit{siempre que} \quad x_1 < x_2 \ ,$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo.

(2) Decimos que una función $f(x)$ es *decreciente* en un intervalo si se cumple que

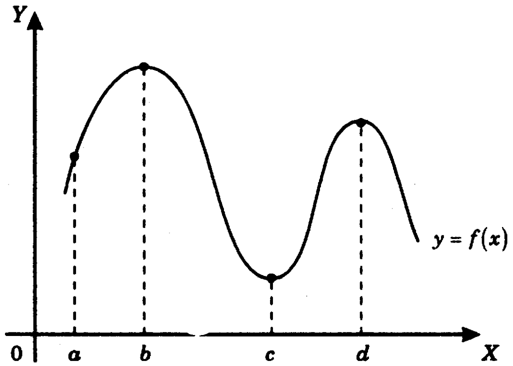
$$f(x_1) > f(x_2) \quad \textit{siempre que} \quad x_1 < x_2 \ ,$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo.

Así, la función $f(x)$ es

creciente, si los valores de $f(x)$ crecen a medida que la abscisa x crece; y

decreciente, si los valores de $f(x)$ decrecen a medida que la abscisa x crece.



La figura muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. La curva es creciente en los intervalos cerrados $[a,b]$ y $[c,d]$, y es decreciente en el intervalo cerrado $[b,c]$.

Por supuesto existen funciones que no son crecientes ni decrecientes.

TEOREMA.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a,b). Se cumple lo siguiente

(1) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a,b), entonces $f(x)$ es creciente en $[a,b]$.

(2) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a,b), entonces $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$.

PRUEBA. Sean $x_1 < x_2$ dos puntos cualesquiera en $[a,b]$.

Por el teorema del valor medio aplicado a la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad (*)$$

(1) Si $f'(x) > 0$ en (a,b) entonces en particular $f'(c) > 0$ y como $x_2 - x_1 > 0$, el segundo miembro de (*) es > 0.

Así, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$. Luego la función es creciente.

(2) Si $f'(x) < 0$ en (a,b) entonces en particular $f'(c) < 0$ y como $x_2 - x_1 > 0$, el segundo miembro de (*) es < 0. Así, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Luego la función es decreciente.

10.10 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS.

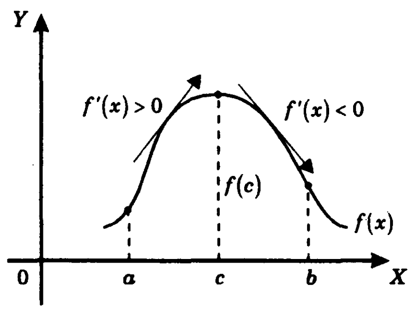
TEOREMA. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto (a,b). Sea c un punto de (a, b). Tenemos lo siguiente

I. Si $\begin{cases} \textbf{1)}\ f'(x) > 0 \text{ en todo punto de } a < x < c & \text{y} \\ \textbf{2)}\ f'(x) < 0 \text{ en todo punto de } c < x < b \end{cases}$

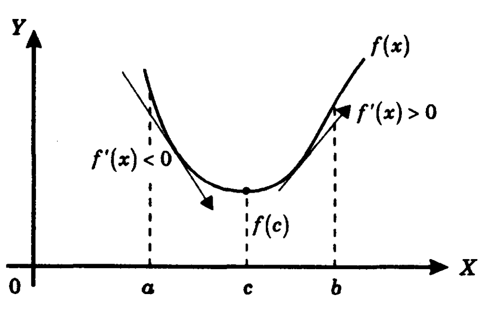
entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo de la función.

II. Si $\begin{cases} \textbf{1)}\ f'(x) < 0 \text{ en todo punto de } a < x < c & \text{y} \\ \textbf{2)}\ f'(x) > 0 \text{ en todo punto de } c < x < b \end{cases}$

entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo de la función.



La figura 1 muestra la gráfica de una función $f(x)$ que cumple las condiciones (1) y (2) de **I.** del teorema 10.10.



La figura 2 muestra la gráfica de una función $f(x)$ que cumple las condiciones (1) y (2) de **II.** del teorema 10.10.

PRUEBA DEL TEOREMA.

I. Por el teorema anterior tenemos que

(1) Si $f'(x)>0$ en $a<x<c$, entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo $a<x<c$, luego se cumple

$$f(x)<f(c) \quad \text{en} \quad a<x<c \tag{A}$$

y (2) Si $f'(x)<0$ en $c<x<b$, entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo $c<x<b$, luego se cumple

$$f(x)>f(c) \quad \text{en} \quad c<x<b \tag{B}$$

De (A) y (B) se sigue que $f(x)\leq f(c)$ para todo x en el intervalo abierto (a,b) . Y esto demuestra que $f(c)$ es un valor máximo relativo.

II. Si $f(x)$ cumple las condiciones (1) y (2) de (II), entonces $-f(x)$ cumple las condiciones (1) y (2) de I, y por lo tanto, gracias a (I), $-f(x)$ es un máximo relativo de la función $-f(x)$, esto es

$$-f(x)\leq -f(c) \quad \text{para todo } x \text{ en } (a,b)\ ,$$

$$f(c)\leq f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } (a,b)\ .$$

Lo cual demuestra que $f(c)$ es un mínimo relativo.

REGLA PARA DETERMINAR LOS EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION.

Para determinar los extremos relativos de la función $f(x)$ se procede de la siguiente manera:

(1) Se halla $f'(x)$.

(2) Se encuentran los puntos críticos de la función, o sea aquellos puntos tales que $f'(x)=0$ o $f'(x)$ no existe.

(3) Se aplica el criterio de la primera derivada (teorema 10.10) a cada punto crítico.

EJEMPLO 1. Sea $f(x) = x^3-6x^2+9x+2$. Hallar

(1) los extremos relativos de la función aplicando el criterio de la primera derivada,

(2) los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos,

(3) los intervalos en los cuales la función es creciente,

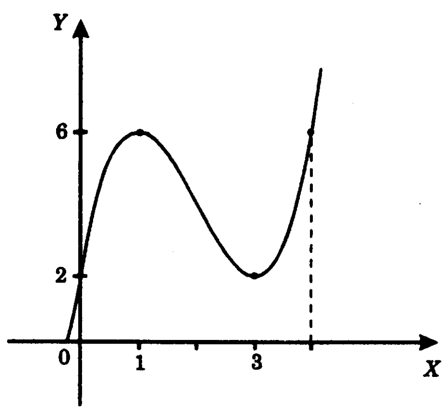
(4) los intervalos en los cuales la función es decreciente.

Dibujar la gráfica.

SOLUCION. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
resultan las raíces $x = 1, 3$.
Por lo tanto $$f'(x) = 3(x-1)(x-3) . \qquad \textbf{(A)}$$
De (A) obtenemos la siguiente tabla

x	$f(x)$	$f'(x)$	CONCLUSION
$x<1$		$+$	$f(x)$ es creciente
$x=1$	6	0	$f(x)$ tiene un valor máximo relativo
$1<x<3$		$-$	$f(x)$ es decreciente
$x=3$	2	0	$f(x)$ tiene un valor mínimo relativo
$3<x$		$+$	$f(x)$ es creciente

Gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.



EJEMPLO 2. Para la función $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$. Encontrar los extremos relativos aplicando el criterio de la primera derivada y los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente. Dibujar la gráfica de $f(x)$.

SOLUCION. La función dada está definida solamente en aquellos puntos x para los cuales $8 - x^2 \geq 0$ o $x^2 \leq 8$, esto es, $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

Resolviendo la ecuación

$$f'(x) = \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} = 0$$

$$8-2x^2 = 0,$$

resulta $x = \pm 2$.

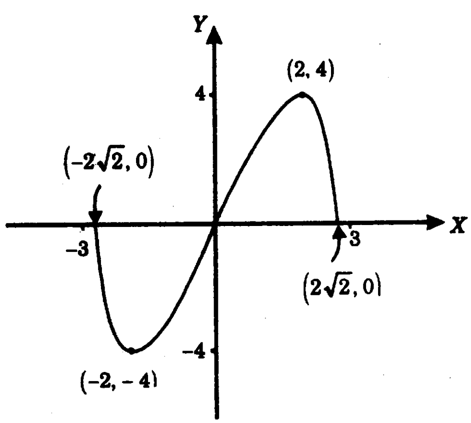
Luego los puntos críticos son $-2\sqrt{2}$, -2 , 2 y $2\sqrt{2}$.

De $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ se tiene $f'(x) = \dfrac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \dfrac{-2(x+2)(x-2)}{\sqrt{8-x^2}}$

Obtenemos la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$	CONCLUSION
$x < -2\sqrt{2}$	No existe	No existe	$f(x)$ no está definida
$x = -2\sqrt{2}$	0	No existe	
$-2\sqrt{2} < x < -2$		$-$	$f(x)$ es decreciente
$x = -2$	-4	0	$f(x)$ tiene un mínimo relativo
$-2 < x < 2$		$+$	$f(x)$ es creciente
$x = 2$	4	0	$f(x)$ tiene un máximo relativo
$2 < x < 2\sqrt{2}$		$-$	$f(x)$ es decreciente
$x = 2\sqrt{2}$	0	No existe	
$x > 2\sqrt{2}$	No existe	No existe	$f(x)$ no está definida

Gráfica de $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$



EJEMPLO 3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 12-(x+5)^2 & \text{si} \quad x \le -3 \\ 5-x & \text{si} \quad -3 < x \le -1 \\ \sqrt{100-(x-7)^2} & \text{si} \quad -1 < x \end{cases}$$

Encontrar los extremos relativos de $f(x)$ y los intervalos en los cuales es creciente o decreciente. Dibujar la gráfica de $f(x)$.

SOLUCION. Observemos que la función dada es continua en todo punto x donde está definida, a saber $(x-7)^2 \le 100$ de donde $x \le 17$.

Tenemos

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+5) & \text{si} \quad x \le -3\,, \\ -1 & \text{si} \quad -3 < x < -1\,, \\ -\dfrac{x-7}{\sqrt{100-(x-7)^2}} & \text{si} \quad -1 < x < 17\,. \end{cases}$$

Luego $f'(x)=0$ si y sólo si $\begin{cases} -2(x+5)=0 & \text{o} \quad x=-5 \\ x-7=0 & \text{o} \quad x=7, \end{cases}$

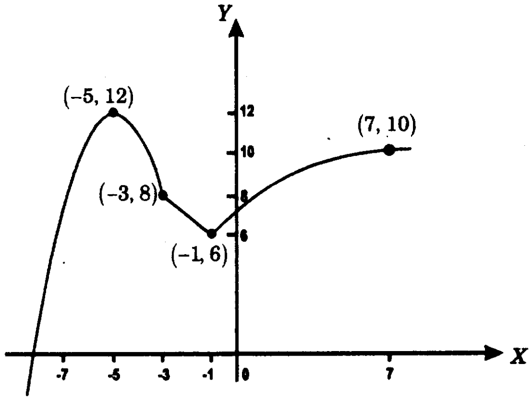
y $f'(x)$ no existe en $x=-3$, -1 y 17.

Por lo tanto, los puntos críticos de $f(x)$ son -5 , -3 , -1 , 7 y 17.

De las expresiones de $f(x)$ y $f'(x)$ obtenemos la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$	CONCLUSION
$x<-5$		$+$	$f(x)$ es creciente
$x=-5$	12	0	$f(x)$ tiene un máximo relativo
$-5<x<-3$		$-$	$f(x)$ es decreciente
$x=-3$	8	No existe	No hay valor extremo relativo
$-3<x<-1$		$-$	$f(x)$ es decreciente
$x=-1$	6	No existe	$f(x)$ tiene un mínimo relativo
$-1<x<7$		$+$	$f(x)$ es creciente
$x=7$	10	0	$f(x)$ tiene un máximo relativo
$7<x<17$		$-$	$f(x)$ es decreciente
$x=17$	0	No existe	No hay valor extremo relativo
$17<x$	No existe	No existe	$f(x)$ no está definida

Gráfica de $f(x)$.



10.11 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS.

TEOREMA. Sea $f(x)$ una función diferenciable en todo punto x de un intervalo abierto que contiene al punto c.

Tenemos lo siguiente

(1) si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo,

(2) si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

Nota.

1. La prueba del presente teorema se da en el problema 1 de la sección 10.14 de problemas resueltos.
2. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)=0$, nada preciso puede concluirse acerca de si $f(c)$ es un extremo relativo o no.

   Lo mismo sucede si $f'(c)=0$ y $f''(c)$ no existe.

EJEMPLO 1. Utilizando el criterio de la segunda derivada. Hallar los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^{2/3}(x-4)^2.$$

Utilizar el criterio de la primera derivada, si no se puede aplicar el criterio de la segunda derivada.

SOLUCION.

1. Tenemos

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}(x-4)^2 + 2x^{2/3}(x-4) = \tfrac{8}{3}x^{-1/3}(x-4)(x-1) .$$

Luego $f'(x)=0$ si y sólo si $x=1$, $x=4$, y $f'(x)$ no existe en $x=0$.

2. Además $\quad f''(x) = \tfrac{8}{9}x^{-4/3}\left(5x^2-10x-4\right)$

y por lo tanto $\quad f''(1)<0 , \quad f''(4)>0 .$

Por consiguiente, por el criterio de la segunda derivada,

$f(1)=9$ es un máximo relativo,

y $\quad f(4)=0$ es un mínimo relativo de la función dada.

3. Nos falta determinar si $f(x)$ tiene un valor extremo relativo en $x=0$. Puesto que $f'(0)$ no existe, no podemos aplicar el criterio de la segunda derivada.

Ensayamos el criterio de la primera derivada. Tenemos $f'(x)<0$ si $x<0$, y $f'(x)>0$ si $0<x<1$.

Luego $f(0)=0$ es un valor mínimo relativo de la función.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	CONCLUSION
$x<0$		$-$		$f(x)$ es decreciente
$x=0$	0	No existe		$f(x)$ tiene un mínimo relativo
$0<x<1$		+		$f(x)$ es creciente
$x=1$	9	0	$-$	$f(x)$ tiene un máximo relativo
$x=4$	0	0	+	$f(x)$ tiene un mínimo relativo

EJEMPLO 2. Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

SOLUCION. Tenemos $\quad f'(x) = 3x^2 - 12$

y $\quad f''(x) = 6x$.

Luego $f'(x)=0$ si y sólo si $x^2-4=0$, esto es $x=\pm 2$, y

$$f''(-2) = -12 , \qquad f''(2) = 12 .$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	CONCLUSION
-2	17	0	$-$	$f(x)$ tiene un valor máximo relativo
2	-15	0	$+$	$f(x)$ tiene un valor mínimo relativo

EJEMPLO 3. Encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{16}{x} + x^2$.

SOLUCION. La función $f(x)$ está definida y es continua en todo $x \neq 0$.

Tenemos $$f'(x) = -\frac{16}{x^2} + 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{32}{x^3} + 2\,.$$

Luego $f'(x) = 0$ si y sólo si $-16 + 2x^3 = 0$,

esto es $$x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = 0\,,$$

cuyas raíces son $x = 2$, $-1 \pm \sqrt{-3}$. Y la única raíz real es $x = 2$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	CONCLUSION
$x = 2$	12	0	$+$	$f(x)$ tiene un valor mínimo relativo

10.12 CALCULO DE EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALOS ARBITRARIOS.

Teorema 1. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo arbitrario I.
Si $f(c)$ es un extremo relativo de $f(x)$ en I y es el único, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto. Además se cumple

(1) Si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces es el valor máximo absoluto de la función en I.

(2) Si $f(c)$ es un mínimo relativo, entonces es el valor mínimo absoluto de la función en I.

Nota.

1. La prueba del teorema se da en el problema 1 de la sección de problemas resueltos 10.16
2. En el enunciado del teorema suponemos que I puede ser un intervalo arbitrario, esto es, I puede tener una de las formas siguientes: $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$, donde $a < b$ son dos números reales.

Ahora consideramos una función continua $f(x)$ en un intervalo abierto (a, b).

Y *suponemos que* $c_1, c_2, \dots, c_p$ *son los únicos puntos críticos de* $f(x)$ *en el intervalo abierto*, esto es, aquellos x en los cuales $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

Sean $\quad M$ = mayor de los valores $f(c_1), \dots, f(c_p)$,

y $\quad m$ = menor de los valores $f(c_1), \dots, f(c_p)$

Teorema 2.

I. $f(x)$ tiene un valor máximo absoluto en (a, b) si y sólo si $f(x) < M$ para todo x cerca de a o b, (por ejemplo, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) < M$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) < M$), y cuando esto ocurre se cumple

$$\text{máximo valor de } f(x) \text{ en } (a, b) = M .$$

II. $f(x)$ tiene un valor mínimo absoluto en (a, b) si y sólo si $f(x) > m$ para todo x cerca de a o b (por ejemplo, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) > m$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) > m$), y cuando esto ocurre se cumple

$$\text{mínimo valor de } f(x) \text{ en } (a, b) = m .$$

Prueba. Ver Problema 2. Secc. 10.16.

EJEMPLO 1. Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x) = (x - 4)^{2/3}$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ si existe alguno.

SOLUCION. La funcion $f(x)$ es continua en $(-\infty, +\infty)$.

Tenemos $\quad f'(x) = \frac{2}{3}(x - 4)^{-1/3}$.

Luego $f'(x)$ no existe en $x = 4$, y $f(4) = 0$.

Puesto que $f'(x) < 0$ si $x < 4$ y $f'(x) > 0$ si $x > 4$, vemos que la función tiene un mínimo relativo en $x = 4$, y como es el único extremo relativo éste es el valor mínimo absoluto de la función en $(-\infty, +\infty)$, por el teorema 1.

EJEMPLO 2. Hallar el valor máximo y mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo $(-1, 4)$ si existe alguno.

SOLUCION. Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$

Luego $f'(x) = 0$ si y sólo si $x^2 - 4x + 3 = 0$, esto es $x = 1, 3.$

Tenemos la siguiente tabla

x	$f(x)$
-1	-15
1	5
3	1
$3 < x < 4$	es creciente
4	5

Luego 5 = mayor de $f(1)$ y $f(3)$,

1 = menor de $f(1)$ y $f(3)$, y por el teorema 2 ,

(1) máximo absoluto de $f(x)$ en $(-1, 4)$ es 5, pues $f(x) < 5$ cerca de los números -1 o 4

(2) la función no tiene mínimo absoluto, pues $f(x) < 1$ cerca de -1.

EJEMPLO 3. Se desea construir una caja cerrada con base cuadrada que tenga un volumen de 20,000 cm^3. El material de la base y de la tapa cuesta \$5 por cm^2 y el material de los lados cuesta \$2 por cm^2.

¿Cuáles son las dimensiones de una caja para la cual el costo del material es mínimo?

SOLUCION. Sean x cm la longitud del cuadrado de la base, y cm la longitud de la altura de la caja.

Puesto que el volumen de la caja es de 20,000 cm^3 tenemos la ecuación

$$x^2 y = 20{,}000 \tag{1}$$

y el costo \$$C$ de la caja es
$$C = 5\left(2x^2\right) + 2(4xy) \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta
$$C = 10x^2 + \frac{160{,}000}{x} \tag{3}$$

Debemos determinar el valor mínimo absoluto de C cuando $x > 0$, esto es, en el intervalo abierto $(0, +\infty)$.

De (3) tenemos $C' = 20x - \dfrac{160{,}000}{x^2} = 0$,

luego $x = 20$ es el único punto crítico de C. Puesto que C es continua en el intervalo $(0, +\infty)$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} C = \lim\limits_{x \to +\infty} C = +\infty$, concluimos gracias al teorema 2, parte II, que C tiene un valor mínimo absoluto en $x = 20$. Y de la ecuación (2) obtenemos $y = 5$.

10.13 CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION.

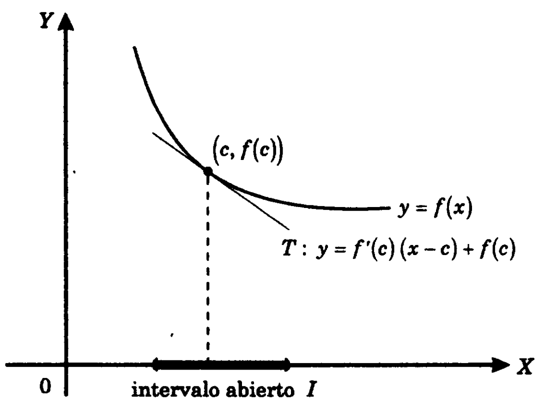
CONCAVIDAD HACIA ARRIBA.

Definición. Decimos que la gráfica de una función $f(x)$ es *cóncava hacia arriba* en el punto $(c, f(c))$ si se cumplen las dos condiciones siguientes

(1) existe $f'(c)$, y

(2) existe un intervalo abierto I que contiene al punto c, tal que para todo $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica se encuentra arriba de la recta tangente T a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

Esto es $\quad f(x) > f'(c)(x - c) + f(c)$, para todo $x \neq c$ en I.



La figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ que es cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$: los puntos de la curva $f(x)$ están arriba de la recta tangente T en el intervalo abierto I.

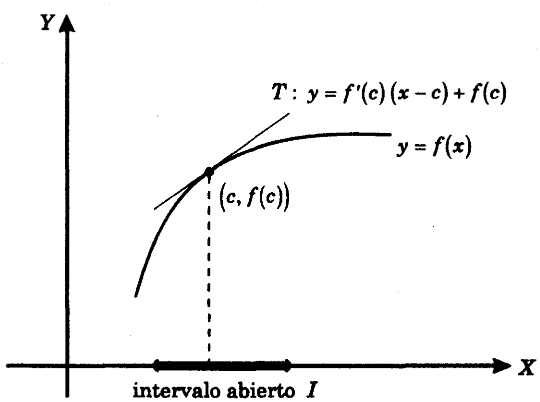
CONCAVIDAD HACIA ABAJO.

Definición. Decimos que la gráfica de una función $f(x)$ es ***cóncava hacia abajo*** en el punto $(c, f(c))$ si se cumplen las dos condiciones siguientes.

(1) existe $f'(c)$, y

(2) existe un intervalo abierto I que contiene al punto c, tal que para todo $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica se encuentra por debajo de la recta tangente T a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

Esto es $f(x) < f'(c)(x-c) + f(c)$, para todo $x \neq 0$ en I.



La figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ que es cóncava hacia abajo en el punto $(c, f(c))$: los puntos de la curva $f(x)$ están por debajo de la recta tangente T en el intervalo abierto I.

CRITERIO DE CONCAVIDAD.

TEOREMA. Sea $f(x)$ una función diferenciable en algún intervalo abierto que contiene al punto c. Se cumple

(1) si $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$; y

(2) si $f''(c) < 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$.

Nota. La prueba del teorema se da en el problema 12, de la sección 10.16 de problemas resueltos.

PUNTOS DE INFLEXION.

Definición. Un punto $(c, f(c))$ es un *punto de inflexión* de la gráfica de $f(x)$ si

I. existe la recta tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$, y

II. existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que se cumple

(1) $f''(x) < 0$ en $a < x < c$ y $f''(x) > 0$ en $c < x < b$,

o **(2)** $f''(x) > 0$ en $a < x < c$ y $f''(x) < 0$ en $c < x < b$.

Nota. Así, si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces de acuerdo al teorema anterior el sentido de concavidad de la gráfica de $f(x)$ cambia en este punto. Por ejemplo, si se cumple la condición (1), entonces $f''(x) < 0$ en $a < x < c$, implica que la gráfica es cóncava hacia abajo en cada $(x, f(x))$ con $a < x < c$; y $f''(x) > 0$ en $c < x < b$ implica que la gráfica es cóncava hacia arriba en cada $(x, f(x))$ con $c < x < b$.

TEOREMA. Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

PRUEBA. Si $f''(c)$ no existe no hay nada que probar.

Supongamos que $f''(c)$ existe. Debemos probar que $f''(c) = 0$.

Consideramos la función $g(x) = f'(x)$.

Luego $g'(x) = f''(x)$ y por definición de punto de inflexión, $g'(x)$ cambia de signo en $x = c$.

Por lo tanto, $g(x)$ tiene un valor extremo relativo en $x = c$ y como $g'(c) = f''(c)$ existe, este valor debe ser igual a cero. Así, tenemos que $f''(c) = 0$ que era lo que queríamos demostrar.

REGLA. El teorema da lugar a la siguiente regla para calcular los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$:

1. Se calcula $f''(x)$,
2. se determinan los puntos x en los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe.
3. en cada punto obtenido en (2) se averigua si la segunda derivada cambia de signo.

EJEMPLO 1. Encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 1$.

SOLUCION. Tenemos $y' = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 1$ y $y'' = 12x^2 - 24x - 36$

Resolviendo la ecuación $y'' = 0$

encontramos las raíces $x = -1, 3$, y por lo tanto $y'' = 12(x+1)(x-3)$.

x	y''	CONCLUSION SOBRE LA GRAFICA
$x < -1$	+	es cóncava hacia arriba
$x = -1$	0	tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 3$	−	es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	tiene un punto de inflexión
$3 < x$	+	es cóncava hacia arriba

EJEMPLO 2. Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

Dibujar la gráfica.

SOLUCION. Tenemos $y' = \dfrac{4(x^2-1)}{(4x^3-12x)^{2/3}}$, $y'' = \dfrac{-32(x^2+1)}{(4x^3-12x)^{5/3}}$.

Luego $y'' \neq 0$, y y'' no existe donde el denominador es 0.

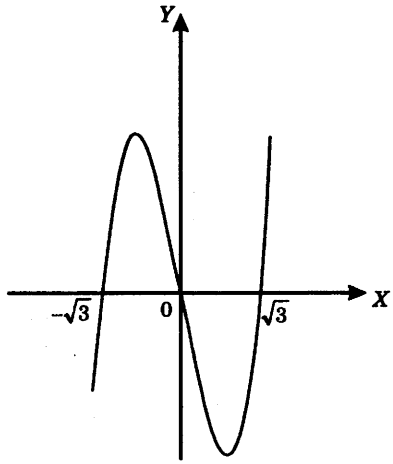
$4x^3 - 12x = 0$, esto es en $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

y obtenemos $y'' = \dfrac{-32(x^2+1)}{\left[4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\right]^{5/3}}$

x	y''	CONCLUSION SOBRE LA GRAFICA
$x < -\sqrt{3}$	+	es cóncava hacia arriba
$x = -\sqrt{3}$	No existe	tiene un punto de inflexión
$-\sqrt{3} < x < 0$	−	es cóncava hacia abajo
$x = 0$	No existe	tiene un punto de inflexión
$0 < x < \sqrt{3}$	+	es cóncava hacia arriba
$x = \sqrt{3}$	No existe	tiene un punto de inflexión
$\sqrt{3} < x$	−	es cóncava hacia abajo

Finalmente tenemos

x	y
-2	-2
$-\sqrt{3}$	0
-1	2
0	0
1	-2
$\sqrt{3}$	0
2	2



10.14 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMAS SOBRE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES SOBRE EXTREMOS RELATIVOS.

PROBLEMA 1. Criterio de la segunda derivada para extremos relativos.

Sea $f(x)$ una función diferenciable en todo punto x de un intervalo abierto que contiene a c. Probar que

1) si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo, y

2) si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

SOLUCION.

1) Por definición de derivada se tiene

$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{x-c} \qquad \text{(pues } f'(c)=0)$$

Puesto que $f''(c)<0$, existe un $\delta>0$ tal que $\dfrac{f'(x)}{x-c}<0$ **(A)**

para todo x tal que $0<|x-c|<\delta$.

Luego tenemos que

si $c-\delta<x<c$, entonces $x-c<0$, y de (A), $f'(x)>0$,

y si $c<x<c+\delta$, entonces $x-c>0$, y de (A), $f'(x)<0$.

En resumen, $f'(x)>0$ en $c-\delta<x<c$,

y $f'(x)<0$ en $c<x<c+\delta$

Por lo tanto, por el criterio de la primera derivada (Teorema 10.10), resulta que $f(c)$ es un valor máximo relativo de la función.

2) si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$, la función $-f(x)$ cumple $-f'(c)=0$ y $-f''(c)<0$. Luego por la parte (1) del presente teorema, $-f(c)$ es un valor máximo relativo de $-f(x)$, y por lo tanto, $f(c)$ es un valor mínimo relativo de la función $f(x)$.

PROBLEMA 2. Hallar los extremos relativos y los intervalos en los cuales

$f(x) = \dfrac{x}{x^2-6x-7}$ es creciente y decreciente.

SOLUCION. Tenemos $f'(x) = -\dfrac{x^2+7}{\left(x^2-6x-7\right)^2}$.

Luego $f'(x)\neq 0$ y $f'(x)$ no existe donde $x^2-6x-7=0$, esto es, en $x=-1,\ 7$.

Así obtenemos

x	$f'(x)$	CONCLUSION SOBRE $f(x)$
$x<-1$	$-$	es decreciente
$x=1$	No existe	no está definida
$-1<x<7$	$-$	es decreciente
$x=7$	No existe	no está definida
$7<x$	$-$	es decreciente

PROBLEMA 3. Encontrar los intervalos en los cuales es creciente y decreciente la función $f(x)=\dfrac{x}{5}-\sqrt[5]{x}$.

SOLUCION. Hallamos $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5}\left(1 - x^{-4/5}\right)$ para $x \neq 0$.

Aplicando el teorema 10.10 tenemos

1) $f'(x) > 0$ o $1 - x^{-4/5} > 0$

$$1 > \frac{1}{x^{4/5}}, \quad 1 > \frac{1}{x^4},$$

$x^4 > 1$, de donde $x < -1$ o $x > 1$,

2) $f'(x) < 0$

$x^4 < 1$, de donde $-1 < x < 1$.

PROBLEMA 4. Sea $y = \dfrac{x^2 - 2x + 10}{x - 1}$. Determinar los extremos relativos y los intervalos en los cuales la función dada es creciente o decreciente.

SOLUCION. Tenemos $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}$,

de donde $y' = 0$ en $x = -2, 4$ y la derivada y' no existe en $x = 1$.

Resulta entonces

x	y	y'	CONCLUSION SOBRE LA FUNCION y
$x < -2$		$+$	es creciente
$x = -2$	-6	0	tiene un valor máximo relativo
$-2 < x < 1$		$-$	es decreciente
$x = 1$	No existe	No existe	no está definida
$1 < x < 4$		$-$	es decreciente
$x = 4$	6	0	tiene un valor mínimo relativo
$4 < x$		$+$	es creciente

PROBLEMA 5. La función $y = x^4 + Ax^3 + B$ tiene un máximo relativo en el punto $(3, -20)$. Hallar A y B.

SOLUCION. Tenemos $y' = 4x^3 + 3Ax^2 = x^2(4x+3A)$

Haciendo $y'=0$ se obtiene $x=0$, $x=\dfrac{-3A}{4}$.

Puesto que, por hipótesis, en $x=3$ la función tiene un máximo relativo, la derivada y' vale 0 en este punto. Luego 3 es uno de los valores 0, $-\dfrac{3A}{4}$.

Por lo tanto $3=-\dfrac{3A}{4}$ y $A=-4$.

Y como $y=-20$ cuando $x=3$, tenemos $-20=(3)^4-4(3)^3+B$, de donde $B=7$.

PROBLEMA 6. Probar que $y=x^3$ es una función creciente.

SOLUCION. Tenemos $y'=3x^2>0$ si $x\neq 0$.
Luego aplicando el teorema 10.9 resulta que y es creciente en los intervalos $(-\infty,0]$ y $[0,+\infty)$, y por lo tanto en $(-\infty,+\infty)$.

PROBLEMA 7. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $f'(x)<g'(x)$ para todo x. Probar que si $x_1<x_2$ entonces

$$f(x_2)-f(x_1) < g(x_2)-g(x_1).$$

SOLUCION. De $f'(x)<g'(x)$ tenemos $\left(f(x)-g(x)\right)'<0$, y por lo tanto, gracias al teorema de 10.9, la función $f(x)-g(x)$ es decreciente. Luego si $x_1<x_2$. Entonces

$$f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2),$$

esto es $f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)$.

PROBLEMA 8. Encontrar los extremos relativos y los intervalos en los cuales $y=-1+6|x|-3x^2$ es creciente y decreciente.

SOLUCION. Tenemos $y = -1+6\left(x^2\right)^{1/2}-3x^2$ (pues $|x|=\left(x^2\right)^{1/2}$)

$$y' = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x^2\right)^{-1/2}(2x) - 6x = 6\frac{x}{|x|}-6x.$$

Luego $\quad y' = \begin{cases} -6-6x & \text{si } x<0 \\ \text{No existe} & \text{si } x=0 \\ 6-6x & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) *Buscamos los puntos x en los cuales $y'>0$.*

Si $x<0$, de $y'=-6-6x>0$ resulta $-1>x$, y

si $x>0$, de $y'=6-6x>0$ resulta $1>x$.

Por lo tanto, $y'>0$ en los intervalos abiertos $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$.

2) *Buscamos los puntos x en los cuales $y'<0$.*

Si $x<0$, de $y'=-6-6x<0$ resulta $-1<x$, y

si $x>0$, de $y'=6-6x<0$ resulta $1<x$.

Por lo tanto, $y'<0$ en los intervalos abiertos $(-1,0)$ y $(1,+\infty)$

Tenemos

x	y	y'	**CONCLUSION SOBRE LA FUNCION** y
$x<-1$		+	es creciente
$x=-1$	2	0	tiene un valor máximo relativo
$-1<x<0$		−	es decreciente
$x=0$	−1		tiene un valor mínimo relativo
$0<x<1$		+	es creciente
$x=1$	2	0	tiene un valor máximo relativo
$1<x$		−	es decreciente

PROBLEMA 9. Determinar los intervalos en los cuales la función $y=\text{sen}\,x.(1+\cos x)$ es creciente y decreciente. Hallar los extremos relativos de y.

SOLUCION. Tenemos $y' = \cos x\,(1+\cos x) + \text{sen}\,x\,(-\text{sen}\,x)$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1 .$$

Resolviendo la ecuación $\quad y'=2\cos^2 x+\cos x-1=0$

resultan las raíces $\quad \cos x = \frac{1}{2}\,,\ -1\,,$

y por lo tanto $$y' = 2\left(\cos x - \tfrac{1}{2}\right)(\cos x + 1). \qquad (1)$$

De (1) se sigue que $$y' > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \tfrac{1}{2} < \cos x, \qquad (2)$$

esto es, cuando $$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

y, $$y' < 0 \quad \text{si y sólo si} \quad -1 < \cos x < \tfrac{1}{2}, \qquad (3)$$

esto es cuando $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n < x < -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n+1)$, exceptuando $x = \pi + 2\pi n$, donde $n = 0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ De (2) y (3) se obtiene

x	y	y'	CONCLUSION SOBRE LA FUNCION y
$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$		$+$	es creciente
$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	tiene un valor máximo relativo
$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+1)$		$-$	es decreciente
$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+1)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	tiene un valor mínimo relativo

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

PROBLEMA 10. Probar que $\operatorname{sen} x < x$ si $x > 0$.

SOLUCION.

1) $\operatorname{sen} x < x$ si $x \geq \dfrac{\pi}{2}$

En efecto, $\operatorname{sen} x \leq 1$ para todo x y $\dfrac{\pi}{2} > 1$.

2) sen $x < x$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En efecto, la función $f(x) = x - \text{sen}\, x$ es creciente en el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pues $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ cuando $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ya que $\cos x < 1$.

Luego $$f(x) > f(0)$$

$$x - \text{sen}\, x > 0 \,,$$

o $$\text{sen}\, x < x$$

si $$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \,.$$

Finalmente de 1) y de 2) se sigue que sen $x < x$ si $x > 0$.

PROBLEMA 11. Probar que $\dfrac{\text{tg}\, x_2}{\text{tg}\, x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$ si $0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

SOLUCION. La función $f(x) = \dfrac{\text{tg}\, x}{x}$ es diferenciable en el intervalo abierto $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,

$$f'(x) = \left(\frac{\text{tg}\, x}{x}\right)' = \frac{x \sec^2 x - \text{tg}\, x}{x^2} = \frac{2x - \text{sen}\, 2x}{2x^2 \cos^2 x} \,.$$

Tenemos que $f'(x) > 0$ en el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En efecto, por el problema 10 el numerador $2x - \text{sen}\, 2x$ es > 0 cuando $x > 0$; y poı otra parte $2x^2 \cos^2 x > 0$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, por el teorema 10.9 resulta que $f(x)$ es creciente y así $$f(x_1) < f(x_2) \,,$$

$$\frac{\text{tg}\, x_1}{x_1} < \frac{\text{tg}\, x_2}{x_2} \,,$$

si $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

Luego se cumple $\dfrac{\text{tg}\, x_2}{\text{tg}\, x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$ si $0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

PROBLEMA 12. Determinar los extremos relativos de la función

$$y = \sqrt{x(a-x)}\,, \qquad a > 0.$$

SOLUCION. La función dada está definida en aquellos x tales que $x(a-x) \geq 0$, esto es, en $0 \leq x \leq a$.

Tenemos $\quad y' = \dfrac{a-2x}{2\sqrt{x(a-x)}}$.

Luego $\quad y' = a - 2x = 0 \quad$ si $\quad x = \dfrac{a}{2}$,

y' no está definida en $x = 0, a$.

y por lo tanto

x	y	y'	CONCLUSION SOBRE LA FUNCION y
$0 < x < \frac{a}{2}$		$+$	es creciente
$x = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	tiene un valor máximo relativo
$\frac{a}{2} < x \leq a$		$-$	es decreciente

PROBLEMA 13. Hallar los extremos relativos de la función $y = |\operatorname{sen} x|$.

SOLUCION. Empleando la identidad $|a| = \left(a^2\right)^{1/2}$ tenemos

$$y = |\operatorname{sen} x| = \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{1/2}$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{-1/2}(2 \operatorname{sen} x \cos x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2|\operatorname{sen} x|}.$$

Luego $\quad y' > 0$ si y sólo si $\operatorname{sen} 2x > 0$, esto es cuando

$$2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n,$$

$y' < 0$ si y sólo si $\operatorname{sen} 2x < 0$, esto es cuando

$$\pi + 2\pi n < 2x < 2\pi + 2\pi n,$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Por lo tanto, en virtud del teorema 10.10 resulta que la función tiene un valor máximo relativo 1 en $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, y un valor mínimo relativo 0 en $x = \pi n$.

PROBLEMA 14. Hallar los valores extremos relativos de la función $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

SOLUCION. La función es diferenciable en todo punto x .

Tenemos $$y' = \frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2} .$$

Luego $y' > 0$ si $x \neq 0$, y por lo tanto la función es creciente en $(-\infty, +\infty)$.

Se sigue pues que no tiene valores extremos relativos.

PROBLEMA 15. Hallar los extremos relativos de la función $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

SOLUCION. Tenemos $$y' = \frac{x^2-12}{3\left(x^2-4\right)^{4/3}} .$$

Luego $y' > 0$ si y sólo si $x^2 - 12 > 0$, o sea

$$-\infty < x < -2\sqrt{3} \quad \text{o} \quad 2\sqrt{3} < x < +\infty ,$$

$y' < 0$ si y sólo si $x^2 - 12 < 0$,

esto es cuando $-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$ y $x \neq -2, 2$.

Y por el teorema 10.10 la función tiene un valor máximo relativo $-\sqrt{3}$ en $x = -2\sqrt{3}$, y un valor mínimo relativo $\sqrt{3}$, en $x = 2\sqrt{3}$.

PROBLEMA 16. Aplicando el criterio de la segunda derivada hallar los extremos relativos de la función $y = x^4 + 4x^2 - 12x + 5$.

SOLUCION. Tenemos $y' = 4x^3 + 8x - 12$.

Por simple inspección vemos que $x = 1$ es una raíz de la ecuación $y' = 0$.

Luego $y' = 4(x-1)\left(x^2+x+3\right)$, y las raíces de $x^2+x+3=0$ son $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$, que no son reales.

En resumen $y'=0$ sólo cuando $x=1$. Evaluando $y''=12x^2+8$ en $x=1$ resulta $y''(1)=20>0$.

Por lo tanto, por el criterio de la segunda derivada, la función tiene un valor mínimo relativo -2 en $x=1$.

PROBLEMA 17. Hallar los extremos relativos de la función $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

SOLUCION. Tenemos

$$y = \frac{-16+10x-x^2}{x^2}$$

$$y' = \frac{32-10x}{x^3}, \qquad (1)$$

$$y'' = \frac{-96+20x}{x^4}. \qquad (2)$$

De (1) vemos que $y'=0$ cuando $x=\frac{32}{10}=3.2$,

y de (2) resulta $y''<0$ cuando $x=3.2$.

Por lo tanto, por el criterio de la segunda derivada, la función tiene un valor máximo relativo $y_{\text{máx}}=\frac{9}{16}$ en 3.2.

PROBLEMA 18. Teorema del incremento local.

Sea $f(x)$ una función. Probar que

1) si $f'(c)>0$, entonces existe un $\delta>0$ tal que

$c-\delta<x_1<c<x_2<c+\delta$ implica $f(x_1)<f(c)<f(x_2)$;

2) si $f'(c)<0$, entonces existe un $\delta>0$ tal que

$c-\delta<x_1<c<x_2<c+\delta$ implica $f(x_1)>f(c)>f(x_2)$.

SOLUCION.

1) Por definición de $f'(c)$ tenemos $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$.

Puesto que $f'(c) > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$

implica $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Luego si $c - \delta < x_1 < c$ se cumple $$\frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} > 0 \qquad \textbf{(A)}$$

y $x_1 - c < 0$, y por lo tanto $f(x_1) - f(c) < 0$,

esto es $f(x_1) < f(c)$.

Y si $c < x_2 < c + \delta$ se cumple $$\frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} > 0 \qquad \textbf{(B)}$$

$x_2 - c > 0$, y por lo tanto $f(x_2) - f(c) > 0$,

esto es $f(c) < f(x_2)$.

De (A) y (B) resulta

$$f(x_1) < f(c) < f(x_2) \quad \text{para} \quad c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta ,$$

que era lo que queríamos demostrar.

2) Basta aplicar el caso (1) a la función $-f(x)$.

PROBLEMA 19. Sea $f(x)$ una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a los puntos a y b, donde $a < b$. Probar que si $f'(a) . f'(b) < 0$ entonces existe un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

SOLUCION. De $f'(a) . f'(b) < 0$ tenemos que

I. $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$

o **II.** $f'(a) > 0$ y $f'(b) < 0$.

Caso I. $f'(a) < 0$ **y** $f'(b) > 0$. Sea $m = f(c)$ el valor mínimo absoluto de $f(x)$ sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, donde c es algún número tal que $a \le c \le b$.

Esto es $$m \le f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

para todo x en $[a, b]$.

Probaremos que $a < c < b$.

En efecto, por el teorema del incremento local (problema 18 que precede) aplicado a $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$ sucesivamente, encontramos un $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \quad \text{implica} \quad f(a) > f(x) \tag{2}$$

y

$$b - \delta < x < b \quad \text{implica} \quad f(x) < f(b) \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) resulta $\quad m = f(c) < f(a)$ y $f(b)$.

Luego $c \neq a, b$, y por lo tanto $a < c < b$, de donde $m = f(c)$ es un valor mínimo relativo de $f(x)$ y $f'(c) = 0$, que era lo que queríamos demostrar.

Caso II. Basta aplicar el caso I a la función $-f(x)$.

10.15 PROBLEMAS PROPUESTOS.

PROBLEMA 1. Hallar los valores extremos relativos y los intervalos en los cuales son crecientes y decrecientes cada una de las siguientes funciones

a) $y = 3 - 4x - x^2$ **d)** $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ **g)** $y = (x+2)^2(x-1)^2$

b) $y = x - 3\sqrt[3]{x} + 2$ **e)** $y = 3 - |x-2|$ **h)** $y = x^{5/4} - 80x^{1/4}$

c) $y = \dfrac{x}{x-3}$ **f)** $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$ **i)** $y = \dfrac{1}{x(12-x^2)}$

PROBLEMA 2. Aplicando el criterio de la segunda derivada probar que $y = x^m(1-x)^n$ tiene un valor máximo relativo en $x = \dfrac{m}{m+n}$, si m y n son enteros ≥ 1.

PROBLEMA 3. Hallar los extremos relativos de la función $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

PROBLEMA 4. Encontrar A y B si la función $y = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$ tiene un valor extremo relativo 2 en $x = \pi/6$.

PROBLEMA 5. Sea $y = x^2 + \dfrac{A}{x}$. Aplicando el criterio de la segunda derivada probar que y tiene un valor mínimo relativo en $x = \left(\dfrac{A}{2}\right)^{1/3}$.

PROBLEMA 6. Encontrar los extremos relativos de la función $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{3}$.

RESPUESTAS.

1. a) $y_{max} = 7$ en $x = 2$; creciente en $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, +\infty)$.

   b) $y_{max} = 4$ en $x = -1$, $y_{min} = 0$ en $x = 1$;
   creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 1)$.

   c) No tiene valores extremos relativos.
   Es decreciente en $x \neq 3$.

   d) No tiene valores extremos relativos.
   La función es creciente en $(-\infty, +\infty)$.

   e) $y_{max} = 3$ en $x = 2$; creciente en $(-\infty, 2)$, decreciente en $(2, +\infty)$.

   f) $y_{max} = 1$ en $x = 0$; creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, +\infty)$.

   g) $y_{max} = \frac{81}{16}$ en $x = -\frac{1}{2}$, $y_{min} = 0$ en $x = -2$ y $x = 1$;
   creciente en $(-2, -1/2)$ y $(1, +\infty)$,
   decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-1/2, 1)$.

   h) $y_{min} = -128$ en $x = 16$; creciente en $(16, +\infty)$, decreciente $[0, 16)$.

   i) $y_{max} = -1/16$ en $x = -2$, $y_{min} = 1/16$ en $x = 2$; y excluyendo $x = 0, \pm 2\sqrt{3}$,
   creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$, decreciente en $(-2, 2)$.

3. $y_{max} = 1$ en $x = 0$, $y_{min} = 0$ en $x = \pm 1$.

4. $A = 1$, $B = \sqrt{3}$.

6. $y_{max} = 5$ en $x = 12\pi n$,

   $y_{max} = 5\cos\frac{2}{5}\pi$ en $x = 12\pi\left(n \pm \frac{2}{5}\right)$,

   $y_{min} = -5\cos\frac{2}{5}\pi$ en $x = 12\pi\left(n \pm \frac{1}{5}\right)$,

$y_{min} = 1$ en $x = 6\pi(2n+1)$,

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

10.16 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMAS SOBRE EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALOS ARBITRARIOS. CONCAVIDAD.

PROBLEMA 1. Sea $f(c)$ el único extremo relativo de una función continua $f(x)$ en el intervalo I. Probar que

1) si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de $f(x)$ en I.

2) si $f(c)$ es un mínimo relativo, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de $f(x)$ en I.

SOLUCION.

1) Debemos probar que $f(x) \leq f(c)$, **(A)**

para todo x en el intervalo I.

Por reducción al absurdo, si la desigualdad (A) fuese falsa exístiria un punto x_0 en I tal que $f(x_0) > f(c)$.

Sea $m = f(x_1)$ el valor mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo cerrado de extremos c y x_0 , donde x_1 es algún número real en el intervalo.

Ahora bien se tiene $f(x) < f(c)$ **(B)**

para todo x cerca de c , ya que $f(c)$ es un máximo relativo y es el único extremo relativo.

De (B) se sigue en particular que $m = f(x_1) < f(c) < f(x_0)$, y por lo tanto que $x_1 \neq c, x_0$. Así, x_1 se encuentra en el *intervalo abierto de extremos* c y x_0.

Resulta entonces que $f(x_1)$ es un mínimo absoluto en este intervalo abierto, y por consiguiente, que es un mínimo relativo. Esto demuestra que $f(x_1)$ es un extremo relativo distinto de $f(c)$, lo cual es una contradicción con la hipótesis de que $f(c)$ es el único extremo relativo. Luego se cumple (A) y por lo tanto que $f(c)$ es el valor máximo absoluto de $f(x)$ en I, como queríamos probar.

2) Basta aplicar la parte (1), ya demostrada, a la función $-f(x)$.

PROBLEMA 2. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto (a,b) y designemos por M = mayor de los valores $f(c_1)$, $f(c_2)$, ..., $f(c_p)$, donde $c_1 < c_2 < .... < c_p$ son los únicos puntos x en el intervalo tales que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

Probar que si $f(x) < M$ para todo x ceca de a o b, entonces

$$\text{máximo valor de } f(x) \text{ en } (a,b) = M .$$

SOLUCION. Puesto que $f(x) < M$ para todo x cerca de a o b existen dos números x_1 y x_2 tales que

$$a < x_1 < x_2 < b\ , \quad x_1 < c_1, \quad c_p < x_2, \quad \text{y} \quad f(x) < M \quad \text{si } a < x \leq x_1 \text{ o } x_2 \leq x < b. \qquad \textbf{(A)}$$

Luego se tiene

$$\text{máximo absoluto de } f(x) \text{ en el intervalo cerrado } [x_1, x_2] = M, \qquad \textbf{(B)}$$

donde la última igualdad se verifica por 9.10.6 y (A).

Finalmente tenemos

de (A), $\quad f(x) < M \quad$ si $\quad a < x \leq x_1$ o $x_2 \leq x < b$,

y de (B), $\quad f(x) \leq M \quad$ si $\quad x_1 \leq x \leq x_2$,

y juntando estas dos relaciones

$$f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \text{ tal que } a < x < b,$$

lo cual prueba que M es en verdad el valor máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo abierto (a,b), que era lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 3. Hallar los extremos absolutos de cada una de las siguientes funciones

(1) $y = 4x^2 + 4x + 7$ en $(-\infty, +\infty)$, **(2)** $y = \dfrac{x^2 - 15}{x - 4}$ en $(-\infty, 4)$,

(3) $y = \dfrac{x+6}{x-3}$ en $[0,4]$.

SOLUCION.

1) Resolviendo la ecuación $y' = 8x + 4 = 0$, resulta $x = -\frac{1}{2}$.

Puesto que $y'' = 8 > 0$, la función tiene un valor mínimo relativo 6 en $x = -\frac{1}{2}$.

Y como es el único extremo relativo de la función, por el problema 1, tenemos que este valor es el mínimo absoluto.

2) La función es continua en el intervaloo $(-\infty, 4)$.

Tenemos $$y' = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2} = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-4)^2}.$$

Luego $y' = 0$ si y sólo si $x = 3, 5$.

Solamente el punto $x = 3$ se encuentra en el intervalo abierto dado, y como $y' > 0$ si $x < 3$, $y' < 0$ si $3 < x < 4$, la función tiene un valor máximo relativo 6 en $x = 3$. Luego dicho valor es el máximo absoluto por el problema 1, ya que es el único extremo relativo.

3) La función es continua en todo punto a excepción de $x = 3$.

Puesto que $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+6}{x-3} = +\infty$, y $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+6}{x-3} = -\infty$,

vemos que la función dada no posee extremos absolutos.

PROBLEMA 4. Hallar los extremos absolutos de la función $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

SOLUCION. Tenemos $$y' = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Luego $y' = 0$ si y sólo si $x = \pm 1$, y por lo tanto

$$y' = -\frac{(x+1)(x-1)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Resulta entonces

x	y	y'	**CONCLUSION SOBRE LA FUNCION** y
$x < -1$		$-$	es decreciente
$x = -1$	$-1/2$	0	tiene un valor mínimo relativo
$-1 < x < 1$		$+$	es creciente
$x = 1$	$1/2$	0	tiene un valor máximo relativo
$1 < x$		$-$	es decreciente

Además $$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Aplicando el teorema 2, de 10.12, concluimos que

$$\text{máximo absoluto de } y = \text{mayor de los valores } -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

y $$\text{mínimo absoluto de } y = \text{menor de los valores } -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

PROBLEMA 5. Probar que para valores positivos de x se cumple la desigualdad

$$x+\frac{1}{x} \geq 2 .$$

SOLUCION. Sea $y = x+\dfrac{1}{x}$ para $x>0$.

Tenemos $$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} .$$

Luego

x	y	y'	CONCLUSION SOBRE LA FUNCION y
$0<x<1$		$-$	es decreciente
$x=1$		0	tiene un valor mínimo relativo
$1<x$	2	$+$	es creciente

Entonces $y=0$ en $x=1$ es el único extremo relativo de la función en el interval $(0,+\infty)$ y por consiguiente, por el teorema 1 de 10.12, este valor es el extremo absoluto de la función. Luego

$$y_{\text{min.abs.}} = 2.$$

Así $y = x+\dfrac{1}{x} \geq 2$.

PROBLEMA 6. Probar que $1-\dfrac{x^2}{2} < \cos x$ cuando $x \neq 0$.

SOLUCION. Consideremos la función $y = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Tenemos $y' = x - \operatorname{sen} x$.

Ahora bien

1) $y' = 0$ cuando $x = 0$,

2) $y' > 0$ cuando $x > 0$, por el problema 10, sección 10.14.

3) $y' < 0$ cuando $x < 0$, pues entonces $-x > 0$, y por el problema 10, sección 10.14,

$$\operatorname{sen}(-x) < -x,$$

esto es, $y' = x - \operatorname{sen} x < 0$.

Resulta así que la función *tiene un único extremo relativo* 0 *en* $x = 0$.

Luego, por el teorema 1 de 10.12, mínimo absoluto de $y = 0$,

y por lo tanto, $y = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$ si $x \neq 0$.

PROBLEMA 7. Hallar la distancia más corta del punto $P = (2, 1/2)$ a la parábola $y = x^2$ y encontrar el punto de la parábola que está más próximo a P.

SOLUCION. Sea D = distancia de P al punto (x, y) de la parábola.

Tenemos $$D = \sqrt{(x-2)^2 + (y - 1/2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(x^2 - 1/2\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^4 - 4x + 17/4}\ ,$$

y debemos hallar $D_{\text{min. abs}}$ cuando $-\infty < x < \infty$

Ahora bien, es claro que D tiene un valor mínimo absoluto si y sólo si D^2 tiene un valor mínimo absoluto.

Así consideramos la función

$$y = D^2 = x^4 - 4x + \tfrac{17}{4}$$

y buscamos $y_{\text{min. abs}}$.

Tenemos $$y' = 4x^3 - 4 = 4(x-1)\left(x^2 + x + 1\right),$$

y por lo tanto
$$y' = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = 1$$
$$y' < 0 \quad \text{si} \quad x < 1,$$
$$y' > 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$

Luego $y = \frac{5}{4}$ cuando $x = 1$, es un valor mínimo relativo de la función, y por ser éste el único extremo relativo, por el teorema 1 de 10.12 resulta que

$$y_{\text{min. abs}} = \frac{5}{4} \qquad \text{en} \qquad x = 1.$$

Por lo tanto $$D_{\text{min. abs.}} = \sqrt{y_{\text{min. abs.}}} = \sqrt{\frac{5}{4}} \qquad \text{en} \qquad x = 1 .$$

PROBLEMA 8. Un fabricante de cajas va a producir cajas cerradas de volumen específico, cuya base es un rectángulo con longitud igual al triple del ancho. ¿En qué relación debe estar la altura de la caja respecto de la longitud de la base cuando el material empleado sea el mínimo posible?

SOLUCION.

Sean V = volumen de una caja de altura h y cuya base tiene dimensiones x, $3x$

y = cantidad de material para construir una caja

= área de todas las caras de la caja

Tenemos
$$V = 3x^2h \tag{1}$$
$$y = 2(\textit{área de la base}) + \textit{área de las caras laterales}$$
$$= 6x^2 + 2(xh + 3xh) = 6x^2 + 8xh \tag{2}$$

Despejando h de (1) y sustituyendo en (2) $$y = 6x^2 + \frac{8V}{3x} \tag{3}$$

Buscamos el valor mínimo absoluto de y cuando $x > 0$.

De (3) tenemos $$y' = 12x - \frac{8V}{3x^2} = \frac{12\left(x^3 - \frac{2}{9}V\right)}{x^2} = \frac{12\,(x-a)\left(x^2 + ax + a^2\right)}{x^2},$$

donde $a = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$.

Luego
$$y' = 0 \quad \text{si} \quad x = a,$$
$$y' < 0 \quad \text{si} \quad x < a,$$
$$y' > 0 \quad \text{si} \quad x > a,$$

y por consiguiente, la función tiene un mínimo relativo en $x = a$, y como éste es el único extremo relativo en el intervalo $(0, +\infty)$, por el teorema 1 de 10.12, dicho valor es también el mínimo absoluto.

Así el mínimo absoluto de y se obtiene en $x = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$, y por consiguiente, de (1) tenemos

$$\frac{h}{3x} = \frac{V}{9x^3} = \frac{V}{9\left(\frac{2V}{9}\right)} = \frac{1}{2} .$$

Luego $\frac{h}{3x} = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 9. Encontrar el punto de la curva $y^2 - x^2 = 1$ que está más próximo al punto $(2,0)$

SOLUCION. Sea D = distancia de $(2,0)$ al punto (x,y) de la curva dada.

Luego $D = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 1 + x^2} = \sqrt{2(x-1)^2 + 3}$.

Entonces $D' = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2(x-1)^2+3}}$ y

$D' = 0$ si $x = 1$; $D' < 0$ si $x < 1$; $D' > 0$ si $x > 1$.

Se sigue pues que D tiene un valor mínimo relativo en $x = 1$, y por ser éste el único extremo relativo de la función, por el teorema 1 de 10.12, dicho valor es también mínimo valor absoluto.

Por lo tanto, la distancia mínima se obtiene en $x = 1$, que da lugar a los puntos $\left(1, \pm\sqrt{2}\right)$ de la curva.

PROBLEMA 10. Hallar la relación que existe entre la altura y el radio de la base de un cilindro recto circular de volumen dado para que su superficie sea mínima.

SOLUCION. Tenemos

$$V = \pi r^2 h \qquad (1)$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad (2)$$

donde r = radio de la base, y h = altura del cilindro.

Despejando h de (1) y reemplazando en (2) $S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

Buscamos el valor mínimo de S cuando $r > 0$. Tenemos

$$S' = \frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)}{r^2} = \frac{4\pi(r-a)\left(r^2+ar+a^2\right)}{r^2}$$

donde $a = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Luego

$$S' = 0 \text{ si } r = a, \qquad S' < 0 \text{ si } r < a, \qquad S' > 0 \text{ si } r > a.$$

Luego S tiene un único extremo relativo en $r = a$, que es un mínimo relativo, y por lo tanto, por el teorema 1 de 10.12, S tiene su valor mínimo absoluto en $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. De (1) tenemos que $\dfrac{h}{r} = \dfrac{V}{\pi r^3} = \dfrac{1}{2}$.

PROBLEMA 11. Hallar dos números a y b tales que su suma sea igual a c y que la suma de sus cuadrados sea mínima.

SOLUCION. Tenemos

$$a + b = c \qquad (1)$$

$$s = a^2 + b^2 \qquad (2)$$

y por lo tanto $$s = a^2 + (c-a)^2 = 2a^2 - 2ca + c^2$$

Buscamos el valor mínimo de s cuando $-\infty < a < +\infty$.

De $$s' = \frac{ds}{da} = 4a - 2c = 4\left(a - \frac{c}{2}\right)$$

vemos que $$s' = 0 \quad \text{si} \quad a = \frac{c}{2},$$

$$s' < 0 \quad \text{si} \quad a < \frac{c}{2},$$

$$s' > 0 \quad \text{si} \quad a > \frac{c}{2}.$$

Luego $a = \dfrac{c}{2}$ da lugar al único extremo relativo de la función y por el teorema 1 de 10.12, el valor mínimo absoluto de s ocurre en $a = \dfrac{c}{2}$.

Finalmente, de (1) resulta $b = \dfrac{c}{2}$.

PROBLEMA 12. Criterio de la concavidad.

Sea $f(x)$ una función diferenciable en algún intervalo abierto que contiene al punto c. Probar que si $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$.

SOLUCION. De acuerdo a la definición de concavidad hacia arriba (10, 13) debemos probar que $f(x) > f'(c)(x-c)+f(c)$, para todo $x \neq c$ en algún intervalo abierto que contiene al punto c.

Sea $\quad H(x) = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c).$

Tenemos $\quad H'(x) = f'(x)-f'(c)$

y $\quad H''(c) = f''(c) > 0.$

Además $\quad H(c) = H'(c) = 0.$

Por definición de $H''(c)$ se tiene

$$\lim_{x\to c} \frac{H'(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{H'(x)-H'(c)}{x-c} = H''(c) = f''(c) > 0$$

(pues $H'(c)=0$ y $H''(c)=f''(c)>0$).

Luego existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{H'(x)}{x-c} > 0 \qquad \text{si} \qquad 0<|x-c|<\delta.$$

De aquí resulta que

1) si $c-\delta < x < c$, entonces $H'(x)<0$, pues $x-c<0$,
2) si $c < x < c+\delta$, entonces $H'(x)>0$, pues $x-c>0$,

y por lo tanto, $H(x)$ es

3) decreciente en el intervalo cerrado $[c-\delta, c]$, y en particular

$$H(x) > H(c) \qquad \text{si} \qquad c-\delta < x < c$$

4) creciente en el intervalo cerrado $[c, c+\delta]$, y en particular

$$H(x) > H(c) \qquad \text{si} \qquad c < x < c+\delta.$$

En resumen: si $x \neq c$ en $[c-\delta, c+\delta]$ se cumple

$$H(x) > H(c)\ ,$$

$$f(x) - f'(c)(x-c) + f(c) > 0\ , \quad (\text{pues } H(c)=0)$$

$$f(x) > f'(c)(x-c) + f(c)\ ,$$

que era lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 13. Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.

SOLUCION. Aplicamos el criterio de concavidad 10.13 (o problema 12 que precede). Tenemos

$$y'' = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Luego

x	y''	CONCLUSION SOBRE LA GRAFICA DE y
$x < 2$	$-$	es cóncava hacia abajo
$x = 2$	0	tiene un punto de inflexión
$x > 2$	$+$	es cóncava hacia arriba

PROBLEMA 14. Encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x - \operatorname{sen} x$.

SOLUCION. Tenemos $\quad y' = 1 - \cos x \; , \quad y'' = \operatorname{sen} x$.

Entonces aplicando el criterio de concavidad 10.13, resulta

x	y''	CONCLUSION SOBRE LA GRAFICA DE y
$2\pi n < x < \pi + 2\pi n$	$+$	es cóncava hacia arriba
$x = \pi n$	0	tiene un punto de inflexión
$\pi + 2\pi n < x < 2\pi(n+1)$		es cóncava hacia abajo

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

PROBLEMA 15. Encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$.

SOLUCION. Tenemos

$$y' = \frac{x^4 + 36x^2}{\left(x^2 + 12\right)^2}, \qquad y'' = \frac{-24x\left(x^2 - 36\right)}{\left(x^2 + 12\right)^3} = -\frac{24(x+6)x(x-6)}{\left(x^2+12\right)^3}$$

Luego por el criterio concavidad 10.13

x	y''	CONCLUSION SOBRE LA GRAFICA DE y
$x < -6$	+	es cóncava hacia arriba
$x = -6$	0	tiene un punto de inflexión
$-6 < x < 0$	–	es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	tiene un punto de inflexión
$0 < x < 6$	+	es cóncava hacia arriba
$x = 6$	0	tiene un punto de inflexión
$6 < x$	–	es cóncava hacia abajo

PROBLEMA 16. Hallar los coeficientes de $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, si la gráfica de la función tiene un punto de inflexión en $(1,-1)$ y la pendiente de la tangente en este punto es -5.

SOLUCION. Tenemos $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$,

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C\ ,\quad y'' = 6Ax + 2B.$$

Luego $-1 = A + B + C$ pues $(1,-1)$ se encuentra en la curva, **(1)**

$-5 = 3A + 2B + C$ pues $y' = -5$, $x = 1$, **(2)**

$0 = 6A + 2B$, **(3)**

ya que $(1,-1)$ es un punto de inflexión (10.13).

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3) resulta

$$A = 4,\ B = -12 \ \text{y}\ C = 7\ .$$

PROBLEMA 17. Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de $y = 3x^2 + x|x|$.

SOLUCION. Tenemos

$$y = \begin{cases} 3x^2 - x^2 = 2x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 3x^2 + x^2 = 4x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x < 0 \\ 8 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y por lo tanto, la gráfica siempre es cóncava hacia arriba.

PROBLEMA 18. Si $f''(x)$ existe para todo x en un intervalo abierto que contiene al punto c y se cumple $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, probar que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función.

SOLUCION. Supongamos que $f'''(c) > 0$.

De $$\lim_{x \to c} \frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} = f'''(c)$$

se deduce que $$\lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{x - c} > 0 \qquad [\text{pues} \quad f''(c) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(c) > 0]$$

y por eso existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \ \text{ implica } \ \frac{f''(x)}{x - c} > 0 \ ,$$

lo que significa que $$f''(x) > 0 \quad \text{en} \quad c < x < c + \delta$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{en} \quad c - \delta < x < c \ ,$$

y así queda establecido que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

El caso $f'''(c) < 0$ se trata de un modo similar.

10.17 PROBLEMAS PROPUESTOS.

PROBLEMA 1. Hallar los extremos absolutos de la función $y = \dfrac{x^2 + 9}{x - 4}$

PROBLEMA 2. Hallar los extremos absolutos de la función $y = \dfrac{6x^2}{1 + x^4}$

PROBLEMA 3. Encontrar los extremos absolutos de la función $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$

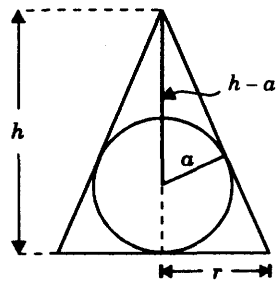
PROBLEMA 4. Hallar los extremos absolutos de la función $y = 5 + 6|x| - 3x^2$ en el intervalo abierto $(0, +\infty)$.

PROBLEMA 5. Encontar los extremos absolutos de la función $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$ en el intervalo $(-\infty,1)$

PROBLEMA 6. Hallar la distancia del punto $(3,0)$ a la curva $y=\sqrt{x}$

PROBLEMA 7. ¿Cuáles son las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio a?

PROBLEMA 8. Encontrar la altura y el radio de la base de un cono recto circular de volumen mínimo que circunscribe una esfera de radio a.



Sugerencia:

Por semejanza de triángulos

$$\frac{h-a}{a}=\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r},$$

de donde $r^2=\dfrac{a^2h}{h-2a}$.

PROBLEMA 9. Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las gráficas de cada una de las siguientes funciones

a) $y=(x-a)^{2n},\ n\geq 1$ **b)** $y=\dfrac{1}{x+2}$ **c)** $y=\cos x$

d) $y=3x+(x+2)^{3/5}$ **e)** $y=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<1 \\ x^3-6x^2+7x-2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

RESPUESTAS.

1. No tiene. **2.** $y_{\max\text{ abs}}=3$ en $x=-1$ y 1; $y_{\min\text{ abs}}=0$ en $x=0$.

3. $y_{\max\text{ abs}}=1$ en $x=\dfrac{\pi n}{2}$, $y_{\min\text{ abs}}=\dfrac{1}{2}$ en $x=\dfrac{\pi}{4}(2n+1)$
donde $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

4. $y_{\max\text{ abs}}=8$ en $x=\pm1$. **5.** $y_{\min\text{ abs}}=0$ en $x=-1$.

6. $d_{\min}=\frac{\sqrt{11}}{2}$. **7.** $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$, $h=\frac{4}{3}a$.

8. $r=a\sqrt{2}$, $h=4a$.

9. **a)** Es cóncava hacia arriba en $(-\infty,+\infty)$.

b) Es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)$, y cóncava hacia arriba en $(-2,+\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

c) Es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\,,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$,

y cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\,,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$,

sus puntos de inflexión son $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\,,\ 0\right)$, donde $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

d) Es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty,-2)$, y

es cóncava hacia abajo en $(-2,+\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $(-2,-6)$.

e) Cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty,1)$, $(2,+\infty)$,

cóncava hacia abajo en el intervalo $(1,2)$;

sus puntos de inflexión son $(1,0)$ y $(2,-4)$.

Capítulo 11

Funciones Inversas

PROPIEDADES BASICAS DE LAS FUNCIONES INVERSAS.

11.1 DEFINICION. Decimos que una función $y = f(x)$ *tiene función inversa en el intervalo I* si se verifican las dos condiciones siguientes

(1) $f(x)$ está definida en todo punto x de I;

(2) para cada valor y_0 que la función $f(x)$ toma en el intervalo *hay exactamente un* x_0 en I tal que $f(x_0) = y_0$.

Cuando las condiciones (1) y (2) se cumplen, se define la función $x = f^{-1}(y)$, y se le llama *la función inversa de* $f(x)$ *en el intervalo* I, mediante la siguiente regla:

Para cada valor y de la función $f(x)$ en el intervalo, escribimos

$$x = f^{-1}(y) \text{ si y sólo si } y = f(x), \text{ con } x \text{ en } I.$$

Nota.

1) Una función puede tener inversa o no en un intervalo.

2) Supongamos que tratamos de determinar si la función $y = f(x)$ tiene inversa en un intervalo.

En muchos casos es posible resolver la ecuación

$$y = f(x) \tag{A}$$

expresando x en términos de y en forma explícita.

Si resulta entonces que hay exactamente un valor de x para cada valor de y, la función dada admite inversa, la cual es dada por la expresión obtenida para x. Por otra parte , si hay dos o más valores de x para algún valor de y, la función dada no admite inversa en el intervalo dado.

En otros casos no es posible resolver explícitamente la ecuación (A) para x en términos de y, como por ejemplo, cuando se trata de las funciones trigonometricas. Veremos entonces que condiciones muy simples, tales como que la derivada de la función sea no nula en todo punto, garantizan la existencia de la función inversa en el intervalo.

EJEMPLO 1. Encontrar la función inversa de $y = 2x + 5$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ si existe.

SOLUCION. Despejando x en términos de y en la ecuación $y = 2x + 5$ resulta el único valor $x = \dfrac{y-5}{2}$, y por lo tanto, la función dada tiene inversa y es dada por $x = \dfrac{y-5}{2}$.

EJEMPLO 2. Hallar la función inversa de $y = x^2 - 3$, si existe, en cada uno de los siguientes intervalos:

(1) $[-5, 8]$ **(2)** $(0, +\infty)$ **(3)** $(-\infty, 0]$.

SOLUCION. Resolviendo la ecuación $y = x^2 - 3$ para x en términos de y resultan los valores $x = \pm\sqrt{y+3}$.

(1) En el intervalo $[-5, 8]$ la función no tiene inversa pues, por ejemplo para $y = 1$ hay dos valores de $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ en el intervalo.

(2) En el intervalo $(0, +\infty)$ la función dada tiene inversa pues para cada valor de y hay exactamente un valor de $x > 0$ tal que

$$x = \sqrt{y+3} \ .$$

La función inversa es dada por esta expresión.

(3) En el intervalo $(-\infty, 0]$ la función dada tiene inversa pues para cada valor de y hay exactamente un intervalo de $x \leq 0$ tal que

$$x = -\sqrt{y+3} \ .$$

La función inversa es dada por esta expresión.

EJEMPLO 3. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$,

hallar la función inversa si existe.

SOLUCION. La función dada no está definida en $x = 1$.

Resolvemos la ecuación $$y = \frac{3x+2}{x-1}$$

para x en términos de y : $xy - y = 3x + 2$ o $x(y-3) = y + 2$.

resultando el único valor $x = \dfrac{y+2}{y-3}$ para todo $x \neq 1$.

Luego la función dada tiene inversa

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-3}$$

en todo $x \neq 1$.

11.2 TEOREMA. Sea $y = f(x)$ una función continua y creciente en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

1) $f(x)$ tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ en el intervalo dado ;

2) $f^{-1}(y)$ está definida en el intervalo cerrado $[A, B]$, donde

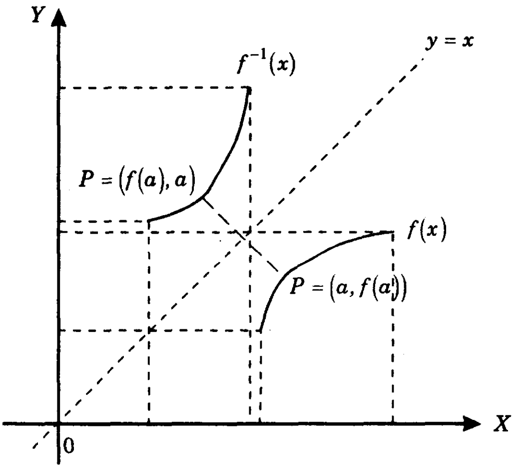
$$A = f(a) \quad \text{y} \quad B = f(b) \ ;$$

3) $f^{-1}(y)$ es continua y creciente en $[A, B]$.

La prueba de este teorema se da en el problema 11 de la sección 11.5 de problemas resueltos.

Representación geométrica del teorema.

Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, son simétricas respecto de la diagonal $y = x$



La figura muestra la gráfica de una ecuación $f(x)$ continua y creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$, y también la gráfica de la función inversa definida en el intervalo cerrado $[A, B]$, donde escribimos $f^{-1}(x)$, llamando x a la variable independiente y, para obtener la gráfica de esta función referida al sistema de ejes XY.

Resulta entonces que las gráficas de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ *son simétricas respecto de la diagonal* $y = x$.

En efecto, de $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$ se sigue que $P = (a, b)$ se encuentra en la gráfica de f si y sólo si $Q = (b, a)$ se encuentra en la gráfica de f^{-1}.

11.3 TEOREMA. Sea $y = f(x)$ una función continua y decreciente en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

1) $f(x)$ tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ en el intervalo dado ;

2) $f^{-1}(y)$ está definida en el intervalo cerrado $[B, A]$, donde

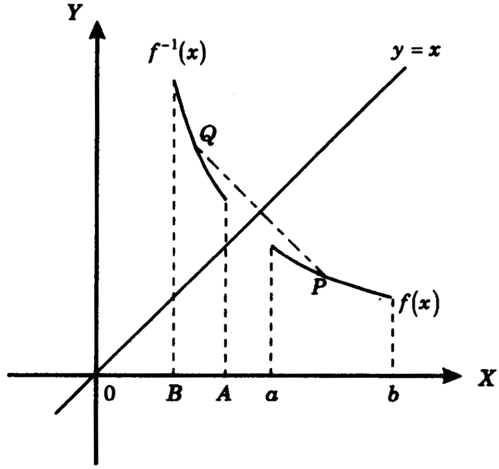
$$A = f(a) \quad \text{y} \quad B = f(b) \ ;$$

3) $f^{-1}(y)$ es continua y decreciente en $[B, A]$.

La prueba de este resultado es similar a la del teorema 11.2.

Si representamos con $f^{-1}(x)$ la función inversa, llamando x a la variable independiente y, entonces las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la diagonal $y = x$.

Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, son simétricas respecto de la diagonal $y = x$.



EJEMPLO 1. Hallar la función inversa de $f(x) = -x^3$, y graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

SOLUCION.

Resolviendo la ecuación $y = -x^3$,

para x resulta el único valor

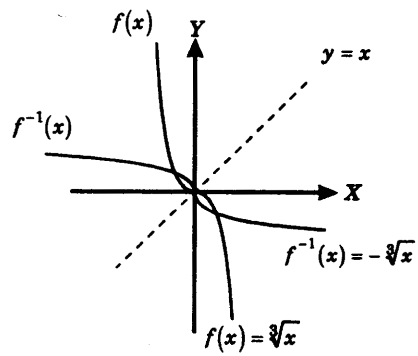
$$x = -\sqrt[3]{y},$$

luego la función inversa de $f(x)$ es

$$f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{y} \quad ,$$

y llamando x a la variable independiente y, obtenemos

$$f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x} \; .$$



EJEMPLO 2. Encontrar la inversa de $f(x) = \dfrac{4x}{1+|x|}$ y graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

SOLUCION. Vamos a resolver la ecuación $y = \dfrac{4x}{1+|x|}$ **(A)**

para x en terminos de y.

Caso 1: $\boldsymbol{x \geq 0}$**.** Entonces $|x| = x$ y en (A) se tiene $y = \dfrac{4x}{1+x}$

$$(1+x)y = 4x\ , \qquad x = \frac{y}{4-y} \qquad \textbf{(B)}$$

donde $0 \leq y < 4$, pues $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Caso 2. $\boldsymbol{x < 0}$**.** Entonces $|x| = -x$ y en (A) se tiene $y = \dfrac{4x}{1-x}$

$$(1-x)y = 4x\ , \qquad x = \frac{y}{4+y} \qquad \textbf{(C)}$$

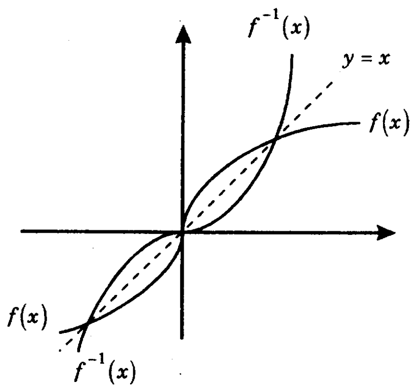
siendo $-4 < y < 0$, pues $x < 0$, $y < 0$.

(B) y (C) pueden darse en una sola expresión $x = \dfrac{y}{4-|y|}$,

con $-4 < y < 4$; luego la función inversa existe y es dada por $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{4-|y|}$

y llamando x a la variable independiente y, resulta $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{4-|x|}$,

en $-4 < x < 4$.



$$f(x) = \frac{4x}{1+|x|}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{4-|x|}, \qquad -4 < x < 4.$$

11.4 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA.

Lema. Sea $y = f(x)$ una función tal que

1) es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$,

2) $f'(x) > 0$ en $a < x < b$, o $f'(x) < 0$ en $a < x < b$.

Entonces la función $f(x)$ tiene inversa $x = f^{-1}(y)$, la cual está definida y es continua en el intervalo cerrado de extremos $f(a)$ y $f(b)$.

Prueba. Por el teorema de 10.9, tenemos que

Si $f'(x) > 0$ en $a < x < b$, entonces $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, y
si $f'(x) < 0$ en $a < x < b$, entonces $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$.

Luego $f(x)$ es continua y creciente o decreciente en el intervalo dado, y aplicando el teorema 11.2 o el teorema 11.3, según sea el caso, obtenemos la conclusión del lema.

TEOREMA. Sea $y = f(x)$ una función que cumple las condiciones del lema.
Entonces para todo número y entre $f(a)$ y $f(b)$ se tiene

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x)}, \qquad \text{donde } x = f^{-1}(y).$$

Nota.

1) El teorema establece que la función inversa $x = f^{-1}(y)$, que existe por el lema, es diferenciable en todo número y entre $f(a)$ y $f(b)$.

2) Puesto que $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, la fórmula dada en el teorema se puede escribir
$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}(x)} \qquad \text{donde } x = f^{-1}(y).$$

En forma breve
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

o
$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 1.$$

También se emplea la notación
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} .$$

PRUEBA DEL TEOREMA. Por el lema, la función inversa $f^{-1}(y)$ está definida en todo número y del intervalo cerrado de extremos $f(a)$ y $f(b)$.

Sean $y \neq y_0$ números entre $f(a)$ y $f(b)$. Fijemos y_0 y escribimos

$$x = f^{-1}(y), \quad x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Tenemos
$$\lim_{y\to y_0} x = x_0 \tag{1}$$

En efecto,
$$\lim_{y\to y_0} x = \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y)$$
$$= f^{-1}(y_0) \qquad \text{(pues } f^{-1}(y) \text{ es continua)}$$
$$= x_0$$

Además, puesto que $x = f^{-1}(y), \quad x_0 = f^{-1}(y_0), \quad y = f(x), \quad y_0 = f(x_0)$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{2}$$

(dividiendo entre $x - x_0$, pues $x \neq x_0$ ya que $f(x) = y \neq y_0 = f(x_0)$.)

Entonces tenemos

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} \qquad \text{(por definición de derivada)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \qquad \text{(por (2))}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \qquad \text{(pues por (1), } x\to x_0 \text{ cuando } y\to y_0\text{)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x_0)} \qquad \text{(definición de derivada)}$$

Y esto es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO 1. Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

1) Probar que tiene inversa en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$

2) Hallar $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y)$ 3) Evaluar $\dfrac{df^{-1}}{dy}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

SOLUCION.

1) La función dada es continua en el intervalo $[0, \pi/2]$ y

$$\frac{df}{dy} = \cos x > 0 \qquad \text{en } \ 0 < x < \frac{\pi}{2} .$$

Luego por el lema de 11.4, $f(x)$ tiene inversa $f^{-1}(y)$ definida en el intervalo cerrado de extremos $f(0) = 0$ y $f(\pi/2) = 1$.

2) Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa tenemos

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x)} = \frac{1}{\cos x} ,$$

donde $y = f(x)$ en $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Puesto que $\quad y = \operatorname{sen} x$, $\quad \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$,

resulta finalmente

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad 0 < y < 1\,.$$

3) Sustituyendo $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en la fórmula que hemos obtenido

$$\frac{df^{-1}}{dy}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 2\,.$$

EJEMPLO 2. Sea la función $\quad f(x) = x^2 + 2x - 5$.

1) Probar que $f(x)$ tiene inversa en el intervalo $[-1, +\infty)$ y encontrar $f^{-1}(y)$

2) Hallar $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y)$ empleando la fórmula de la derivada de la función inversa

3) Hallar $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y)$ derivando directamente la función $f^{-1}(y)$

4) Evaluar $\dfrac{df^{-1}}{dy}(10)$.

SOLUCION.

1) La función dada es diferenciable, y por consiguiente continua, en todo punto x.
Además $\quad f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1) > 0 \quad$ cuando $x > -1$.

Se sigue entonces del lema de 11.4 , aplicado en cada intervalo cerrado $[-1, b]$ con $b > -1$, que la función dada tiene inversa $f^{-1}(y)$ en $[-1, +\infty)$.

Para encontrar $f^{-1}(y)$ resolvemos la ecuación $y = x^2 + 2x - 5$ para x en términos de y : $x^2 + 2x - (y+5) = 0$, de donde $x = -1 \pm \sqrt{y+6}$, con $-6 \le y$, y puesto que $x \ge -1$ debemos tener

$$x = f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y+6}\,, \qquad \textbf{(A)}$$

que es la función inversa buscada.

2) Aplicando la fórmula de la función inversa tenemos

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x)} ,$$

donde $y = f(x)$ en $-1 < x < \infty$.

Pero $\dfrac{df}{dx}(x) = 2x + 2$

$= 2\left(-1 + \sqrt{y+6}\right) + 2$ **(reemplazando el valor dado en (A))**

$= 2\sqrt{y+6}$.

Luego $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y+6}}$.

3) De (A) tenemos $f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y+6}$,

y derivando respecto de la variable y : $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y+6}}$, resultado idéntico al obtenido en (2).

4) Para $y = 10$ tenemos $\dfrac{df^{-1}}{dy}(10) = \dfrac{1}{8}$.

11.5 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Encontrar los intervalos en los cuales la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ tiene inversa y hallar las respectivas funciones inversas.

SOLUCION. Tenemos $f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$.

Luego $f'(x) > 0$ en $3 < x$ y $f'(x) < 0$ en $x < 3$, y por lo tanto, por el lema de 11.4, la función $f(x)$ tiene inversa en cada uno de los intervalos $[3, +\infty)$ y $(-\infty, 3]$.

Para hallar cada función inversa resolvemos la ecuación $y = x^2 - 6x + 8$

para x en términos de y , $x^2 - 6x + (8-y) = 0$,

resultando $x = 3 \pm \sqrt{y+1}$;

y por lo tanto $f^{-1}(y) = 3+\sqrt{y+1}$ es la función inversa de $f(x)$ en el intervalo $[3,+\infty)$, y $f^{-1}(y) = 3-\sqrt{y+1}$ es la función inversa de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 3]$.
Observemos que las dos funciones inversas están definidas en $[-1,+\infty)$

PROBLEMA 2. Encontrar los intervalos en los cuales la función $f(x) = x+\dfrac{4}{x}$ tiene inversa y hallar las respectivas funciones inversas.

SOLUCION. La función es continua en todo $x \neq 0$.

Tenemos
$$f'(x) = 1-\frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} .$$

Luego $\quad f'(x)>0$ si $x<-2$, o $x>2$,

y $\quad f'(x)<0$ si $-2<x<0$ y $0<x<2$,

y por lo tanto $f(x)$ tiene inversas en cada uno de los intervalos $(-\infty,-2]$, $[-2,0)$, $(0,2]$ y $[2,+\infty)$

Resolviendo la ecuación $y = x+\dfrac{4}{x}$ para x en términos de y

obtenemos $\quad x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2-16}}{2}$, $y^2 \geq 16$.

Tenemos

1) *Inversa de* $f(x)$ *en el intervalo* $(-\infty,-2]$.

De $\quad -\infty < x \leq -2$

$$-\infty < \frac{y \pm \sqrt{y^2-16}}{2} \leq -2 ,$$

vemos por simple inspección, por ejemplo, evaluando en $y=-5$, que el signo es $-$, y por lo tanto

$$f^{-1}(y) = \frac{y-\sqrt{y^2-16}}{2}$$

es la inversa de $f(x)$ en el intervalo.

2) *Inversa de* $f(x)$ *en el intervalo* $[-2, 0)$.

De $\quad -2 \leq x < 0$

$$-2 \leq \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 16}}{2} < 0 ,$$

vemos por simple inspección, por ejemplo, evaluando en $y = -5$, que el signo es +, y por lo tanto

$$f^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 16}}{2}$$

es la función inversa en el intervalo.

Procediendo en forma análoga, evaluando esta vez en $y = 5$, encontramos que

3) *inversa de* $f(x)$ *en el intervalo* $(0,2]$ es $f^{-1}(y) = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 16}}{2}$,

4) *inversa de* $f(x)$ *en el intervalo* $[2, +\infty)$ es $f^{-1}(y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 16}}{2}$.

PROBLEMA 3. Probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^4 + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

tiene inversa en $(-\infty, +\infty)$ y hallar $f^{-1}(y)$.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{\left(1 + x^2\right)^2} & \text{si } x < 0 \\ 4x^3 & \text{si } x > 0 , \end{cases}$$

y por lo tanto $f'(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

Luego $f(x)$ tiene inversa en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, +\infty)$.

Resolviendo las ecuaciones $\quad y = \dfrac{1}{1+x^2} \quad$ si $x \leq 0$

$$y = x^4 + 1 \qquad \text{si} \quad x > 0 ,$$

para x en términos de y se obtienen las siguientes funciones inversas

$$x = -\sqrt{\frac{1}{y} - 1}, \qquad 0 < y \leq 1 ,$$

$$x = \sqrt[4]{y-1} \qquad y > 0 .$$

de $f(x)$ en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $(0, +\infty)$, respectivamente.

PROBLEMA 4.

(1) Probar que la función $y = \operatorname{tg} x$ tiene inversa en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) Designando por $\operatorname{arc\,tg} y$ (función *arco tangente*) la función inversa de $\operatorname{tg} x$, probar que $\dfrac{d}{dy}\operatorname{arc\,tg} y = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\quad -\infty < y < \infty$.

SOLUCION.

1) La función $y = \operatorname{tg} x$ es diferenciable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ con

$$\frac{dy}{dx} \sec^2 x > 0 \qquad \text{en} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} .$$

Luego, por el lema de 11.4, la función $\operatorname{tg} x$ tiene inversa en el intervalo dado.

2) Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa (teorema de 11.4) tenemos

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arc\,tg} y = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} x}, \qquad \text{donde} \quad \operatorname{tg} x = y ,$$

pero $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$,

y por lo tanto $\quad \dfrac{d}{dy}\operatorname{arc\,tg} y = \dfrac{1}{1+y^2}$,

que era lo que queriamos demostrar.

PROBLEMA 5. Encontrar los intervalos en los cuales la función $f(x)=x^2-8|x|+9$ tiene inversa y hallar las respectivas funciones inversas.

SOLUCION. Tenemos

$$f(x) = \begin{cases} x^2+8x+9 & x<0 \\ x^2-8x+9 & x\geq 0, \end{cases}$$

y

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+4) & x<0 \\ 2(x-4) & x>0. \end{cases}$$

Luego

x	$f'(x)$
$x<-4$	$-$
$-4<x<0$	$+$
$0<x<4$	$-$
$4<x$	$+$

y la función $f(x)$ tiene inversa en cada uno de los intervalos $(-\infty,-4]$, $[-4,0]$, $[0,4]$ y $[4,+\infty)$.

Resolviendo la ecuación $y=f(x)$ para x en términos de y encontramos

$$x = \begin{cases} -4 \pm \sqrt{25-y} & \text{cuando} \quad x<0 \\ 4 \pm \sqrt{25-y} & \text{cuando} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

(1) En el intervalo $(-\infty,-4]$ se tiene $x\leq -4$, y por lo tanto

$$f^{-1}(y) = -4-\sqrt{25-y}\ .$$

(2) En el intervalo $[-4,0]$ se tiene $-4\leq x\leq 0$, y por lo tanto

$$f^{-1}(y) = -4+\sqrt{25-y}\ .$$

(3) En el intervalo $[0,4]$ la inversa de $f(x)$ es

$$f^{-1}(y) = 4-\sqrt{25-y}$$

(4) En el intervalo $[4,+\infty)$ la inversa de $f(x)$ es

$$f^{-1}(y) = 4+\sqrt{25-y}\ .$$

PROBLEMA 6. Sea $f(x) = x^5+x^3$.

(1) Probar que $f(x)$ tiene inversa

(2) Hallar el intervalo en el que $f^{-1}(y)$ está definida

(3) Hallar $\dfrac{df^{-1}}{dy}(-2)$.

SOLUCION.

(1) Puesto que $f'(x) = 5x^4+3x^2>0$ si $x\neq 0$, por el lema de 11.4 la función $f(x)$ tiene inversa en $(-\infty,+\infty)$.

(2) Sea $y = x^5+x^3$.

De $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$,

vemos que $f^{-1}(y)$ está definida en el intervalo $(-\infty,+\infty)$, esto es en todo número y.

(3) Para $y=-2$ vemos por simple inspección que $x=-1$ satisface $-2=f(-1)$.

Luego por la fórmula de la derivada de la función inversa

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x)}\ , \qquad \text{con } y=f(x)\ ,$$

$$= \frac{1}{5x^4+3x^2}\ ,$$

y sustituyendo $y=-2$, $x=-1$, resulta $\dfrac{df^{-1}}{dy}(-2) = \dfrac{1}{8}$.

PROBLEMA 7. Sea $f(x) = \dfrac{-5}{x^6+3x^2+1}$.

(1) Encontrar los intervalos en los cuales $f(x)$ tiene inversa.

(2) Encontrar los intervalos en los cuales cada función inversa $f^{-1}(y)$ está definida.

(3) Hallar $\left(f^{-1}\right)'(-1)$ cuando $-1 = f(1)$ y $-1 = f(-1)$.

SOLUCION.

(1) Tenemos $f'(x) = \dfrac{30\,x\left(x^4+1\right)}{\left(x^6+3x^2+1\right)^2}$.

Luego $f'(x) < 0$ si $x < 0$

y $f'(x) > 0$ si $x > 0$,

y por consiguiente, $f(x)$ tiene inversa en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, +\infty)$.

Nótese que $f(x) \le -5$.

(2) En $(-\infty, 0]$ tenemos $f(0) = -5$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

luego la inversa de $f(x)$ en $(-\infty, 0]$ está definida en el intervalo $[-5, 0)$.

En $[0, +\infty)$ tenemos $f(0) = -5$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

luego la inversa de $f(x)$ en $[0, +\infty)$ también está definida en el intervalo $[-5, 0)$.

(3) De la fórmula de la derivada de la función inversa (teorema de 11.4)

tenemos
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{donde } y = f(x),$$
$$= \frac{\left(x^6+3x^2+1\right)^2}{30\,x\left(x^4+1\right)} \qquad \text{(por (1))}.$$

Luego si $y = -1$, $x = -1$, resulta $\left(f^{-1}\right)'(-1) = -\frac{5}{12}$;

y $y = -1$, $x = 1$, resulta $\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{5}{12}$.

PROBLEMA 8. Usando diferenciación implícita en la ecuación $y^2 - 3x^2 - 2y - 8 = 0$ encontrar los puntos (x, y) en los cuales $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dx}{dy}$ son recíprocos.

SOLUCION. Derivando implícitamente respecto de x

$$2y\frac{dy}{dx} - 6x - 2\frac{dy}{dx} = 0,$$

resulta
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y-1} \qquad (1)$$

y derivando implícitamente respecto de y

$$2y - 6x\frac{dx}{dy} - 2 = 0,$$

obtenemos
$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-1}{3x}. \qquad (2)$$

De (1) y (2) vemos que no se cumple $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$.

solamente cuando $\frac{dy}{dx} = 0$ o $\frac{dx}{dy} = 0$, esto es cuando $x = 0$ o $y = 1$.

Ahora bien para $x = 0$, resolviendo la ecuación de la curva tenemos

$$y^2 - 2y - 8 = 0,$$

de donde $y = -2, 4$;

y para $y = 1$, resolviendo la ecuación de la curva tenemos

$$-3x^2 - 9 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{-3},$$

valores que no son reales.

Luego $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$ son recíprocos en todo punto $(x, y) \neq (0, -2)$ y $(0, 4)$ de la curva.

PROBLEMA 9. Si $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(y)$ son diferenciables, usando la regla de la cadena probar directamente la fórmula de la derivada de la función inversa.

SOLUCION. Tenemos $x = f^{-1}(y)$, $y = f(x)$.

Luego por la regla de la cadena

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df^{-1}}{dy}(y) \cdot \frac{df}{dx}(x) ,$$

de donde $\displaystyle \frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}$,

que es lo que queriamos demostrar.

PROBLEMA 10. Hallar $\displaystyle \frac{df^{-1}}{dy}(y)$ para cada una de las siguientes funciones en $y = f(x)$.

(1) $f(x) = x^5 - 15x + 1, \quad y = f(2)$; **(2)** $f(x) = \cos 3x, \quad y = f(\pi/18)$.

SOLUCION. Aplicamos la fórmula

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)} , \qquad \text{donde } x = f^{-1}(y) \quad . \qquad (*)$$

(1) Tenemos $f'(x) = 5x^4 - 15$.

Luego sustituyendo $3 = f(2)$ en la fórmula (*)

$$\frac{df^{-1}}{dy}(3) = \frac{1}{65}.$$

(2) Tenemos $f'(x) = -3 \operatorname{sen} 3x$.

Luego sustituyendo $\displaystyle \frac{1}{2} = f\left(\frac{\pi}{18}\right)$ en la fórmula (*)

$$\frac{df^{-1}}{dy}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-3 \operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{18}\right)} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} .$$

PROBLEMA 11. Sea $y = f(x)$ una función continua y creciente en un intervalo cerrado $[a,b]$. Probar que

(1) $f(x)$ tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ en $[a,b]$.

(2) $f^{-1}(y)$ está definida en el intervalo cerrado $[A,B]$ donde $A = f(a)$, y $B = f(b)$.

(3) $f^{-1}(y)$ es creciente en $[A,B]$.

(4) $f^{-1}(y)$ es continua en $[A,B]$.

SOLUCION.

(1) De acuerdo a la definición de función inversa 11.1, debemos probar que para cada valor y_0 de la función *hay exactamente* un x_0 en $[a,b]$ tal que $y_0 = f(x_0)$.

Por reducción al absurdo supongamos que hubiesen dos números distintos

$$x_0 \text{ y } x_1 \text{ en } [a,b] \text{ tales que } y_0 = f(x_0) = f(x_1) \qquad (*)$$

De $x_0 \neq x_1$ se tiene $x_0 < x_1$ o $x_1 < x_0$, y por lo tanto, por ser $f(x)$ creciente $f(x_0) < f(x_1)$ o $f(x_1) < f(x_0)$.

Luego en cualquier caso $f(x_0) \neq f(x_1)$, lo cual contradice (*).

Así, para el valor y_0 hay exactamente un x_0 en $[a,b]$ talque $y_0 = f(x_0)$.

(2) Puesto que $y = f(x)$ es creciente se cumple $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ o $A \leq y \leq B$ para todo valor y de la función.

Luego los puntos y en los cuales $f^{-1}(y)$ está definida se encuentran en el intervalo $[A,B]$.

Falta ver que $f^{-1}(y)$ está definida en *todo punto* y de $[A,B]$.

Ahora bien dado y_0 tal que $A \leq y_0 \leq B$ o $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$,

siendo $f(x)$ una función continua , por el teorema del valor intermedio (7.9) existe un x_0 en $[a,b]$ tal que $y_0 = f(x_0)$. Luego el número dado y_0 es un valor de la función y por lo tanto $f^{-1}(y)$ ésta definida en y_0.

(3) Debemos probar que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ si $y_1 < y_2$ en $[A,B]$.

Escribimos $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$; esto es $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, donde x_1 , x_2 se encuentran en $[a,b]$

Entonces debe cumplirse $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ pues de lo contrario

$$f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1), \quad x_2 \leq x_1 , \quad \text{y} \quad f(x_2) \leq f(x_1) ,$$

por ser $f(x)$ creciente; luego $y_2 \leq y_1$, lo cual contradice $y_1 < y_2$.

Asi $f^{-1}(y)$ es creciente en $[A,B]$.

(4) Debemos probar que $f^{-1}(y)$

(i) es continua en todo y_0 tal que $A < y_0 < B$,

(ii) es continua por la derecha en A,

(iii) es continua por la izquierda en B.

Nos contentaremos en demostrar (i), siendo las pruebas (ii) y (iii) similares a la de (i).

Así vamos a probar que $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ cuando $A < y_0 < B$, esto es, dado un $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|y - y_0| < \delta \quad \text{implica} \quad \left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \right| < \varepsilon .$$

Puesto que $a = f^{-1}(A) < f^{-1}(y_0) < b = f^{-1}(B)$ podemos suponer que

$$\varepsilon < \min \left\{ f^{-1}(y_0) - a, \; b - f^{-1}(y_0) \right\}$$

de manera que $f^{-1}(y_0) \pm \varepsilon$ se encuentran en (a, b).

Sean $\quad A_1 = f\left(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\right) \quad$ o $\quad f^{-1}(A_1) = f^{-1}(y_0) - \varepsilon \quad$ y

$$B_1 = f\left(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\right) \quad \text{o} \quad f^{-1}(B_1) = f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

Entonces de $\quad f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$,

por ser $f(x)$ creciente se tiene $A_1 < y_0 < B_1$. Sea $\delta = \min\{y_0 - A_1, \; B_1 - y_0\} > 0$.

Luego $\quad A_1 \leq y_0 - \delta$, y $\quad y_0 + \delta \leq B_1$.

Finalmente, para todo y tal que $|y - y_0| < \delta$

se tiene $\quad A_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq B_1 \quad$ o $\quad A_1 < y < B_1$.

y puesto que por (3) $f^{-1}(y)$ es creciente,

$$f^{-1}(A_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(B_1) , \quad f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon,$$

esto es $\left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \right| < \varepsilon$. Lo cual demuestra que $f^{-1}(y)$ es continua en y_0.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS.

Una aplicación de la teoría de las funciones inversas que hemos desarrollado en 11.1 se encuentra en el estudio de las funciones trigonométricas inversas, que procedemos a considerar en seguida. Vamos a demostrar que en ciertos intervalos de longitud π, las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ...tienen inversas que se designan con $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, ..., respectivamente.

11.6 LA FUNCION ARCO SENO.

Puesto que $\dfrac{d}{dy}\operatorname{sen} y = \cos y > 0$ en $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, por el lema de 11.4 la función $\operatorname{sen} y$ tiene inversa en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la cual está definida y es continua y creciente en el intervalo cerrado de extremos $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Llamando $y = \operatorname{arc\,sen} x$ a tal función inversa tenemos entonces la siguiente definición.

Definición. Para todo x tal que $-1 \leq x \leq 1$ se define

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq y \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

TEOREMA. Derivada de la función arco seno. Se cumple

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

PRUEBA. Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa (teorema de 11.4), tenemos

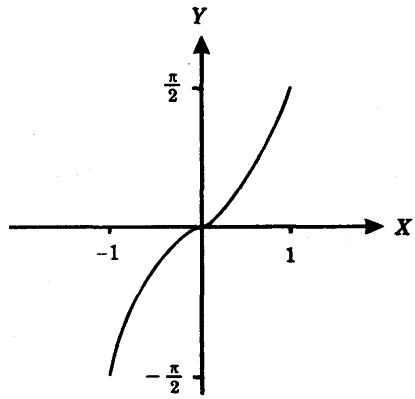
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} y}, \tag{1}$$

donde $x = \operatorname{sen} y$.

Pero $$\frac{d}{dy}\operatorname{sen} y = \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$

y sustituyendo este valor en (1) resulta la fórmula del teorema.

Gráfica de la función arco seno. La gráfica de la función $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es dada en la siguiente figura.



11.7 LA FUNCION ARCO COSENO.

Puesto que $\dfrac{d}{dy}\cos y = -\operatorname{sen} y < 0$ en $0 < y < \pi$, por el lema de 11.4 la función $\cos y$ tiene inversa en el intervalo $[0, \pi]$, la cual está definida y es continua y decreciente en el intervalo cerrado de extremos $\cos 0 = 1$ y $\cos \pi = -1$.

Llamando $y = \operatorname{arc} \cos x$ a tal función inversa tenemos entonces la siguiente definición.

Definición. Para todo x tal que $-1 \le x \le 1$ se define

$$y = \operatorname{arc} \cos x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y, \quad \text{y} \quad 0 \le y \le \pi .$$

TEOREMA. Se cumple $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{arc}\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$

La prueba de está fórmula es análoga a la dada para la función arco seno.
Omitimos detalles.

11.8 LA FUNCION ARCO TANGENTE.

Puesto que $\dfrac{d}{dy}\operatorname{tg} y = \sec^2 y > 0$ en $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, la función $\operatorname{tg} y$ tiene inversa en el *intervalo abierto* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Observemos que $\operatorname{tg} x$ no está definida en $-\frac{\pi}{2}$ ni en $\frac{\pi}{2}$.

De $\lim_{y \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y = -\infty$ y $\lim_{y \to +\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y = +\infty$, vemos que la función está definida y es continua y creciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Llamando $y = \operatorname{arc\,tg} x$ a la función inversa tenemos la siguiente definición

Definición. Para todo x se define

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \operatorname{tg} y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

TEOREMA. Derivada de la función arco tangente.

Se cumple $\qquad \dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad$ para todo x.

PRUEBA. Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa se tiene

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\operatorname{tg} y} \tag{1}$$

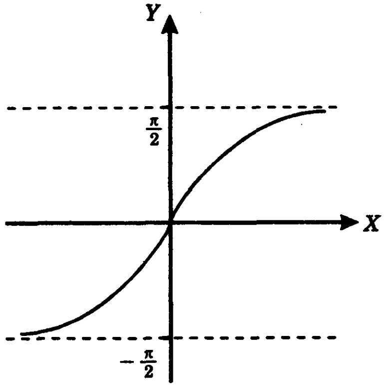
donde $\qquad x = \operatorname{tg} y$.

Pero $\qquad \dfrac{d}{dy}\operatorname{tg} y = \sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$

y sustituyendo este valor en (1) resulta la fórmula deseada.

Gráfica de la función arco tangente.

$y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad (-\infty < x < +\infty)$



Procediendo como en los casos anteriores se justifican las siguientes definiciones.

11.9 LA FUNCION ARCO COTANGENTE.

Definición. Para todo x se define

$$y = \text{arc ctg } x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \text{ctg } y \ , \ 0 < y < \pi .$$

Se cumple
$$\frac{d}{dx}\text{arc ctg } x = -\frac{1}{1+x^2} \ , \ -\infty < x < +\infty .$$

(ver problema 9 de la sección 11.13).

11.10 LA FUNCION ARCO SECANTE.

Definición. Para todo x tal que $|x| \geq 1$, se define

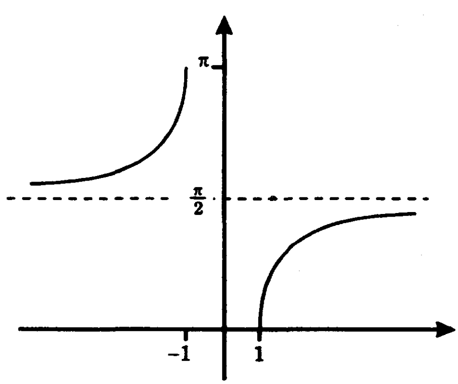
$$y = \text{arc sec } x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y, \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi, \ y \neq \tfrac{\pi}{2}.$$

Nota. El valor $y = \frac{\pi}{2}$ está exluido en la definición, pues $\sec y$ no está definida allí.

Se cumple
$$\frac{d}{dx}\text{arc sec } x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \ , \ |x| > 1.$$

(Ver problema 11 de la sección 11.13).

Gráfica de la función arco secante.



11.11 LA FUNCION ARCO COSECANTE.

Definición. Para todo x tal que $|x| \geq 1$, se define

$$y = \text{arc cosec}\, x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \text{cosec}\, y \quad \text{y} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq y \leq \tfrac{\pi}{2}\,, \quad y \neq 0\,.$$

Nota. El valor $y = \frac{\pi}{2}$ está excluído en la definición, pues sec y no está definida allí.

Se cumple $$y = \text{arc cosec}\, x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,, \qquad |x| > 1.$$

(ver problema 14 de la sección 11.13).

11.12 TABLA: Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable.

Entonces empleando la regla de la cadena y las derivadas de las funciones arco seno, arco coseno, ..., obtenemos la siguiente tabla:

(1) $$\frac{d}{dx}\text{arc sen}\, v = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

(2) $$\frac{d}{dx}\text{arc cos}\, v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

(3) $$\frac{d}{dx}\text{arc tg}\, v = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$$

(4) $$\frac{d}{dx}\text{arc ctg}\, v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$$

(5) $$\frac{d}{dx}\text{arc sec}\, v = \frac{\frac{dv}{dx}}{|v|.\sqrt{v^2-1}}$$

(6) $$\frac{d}{dx}\text{arc cosec}\, v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{|v|.\sqrt{v^2-1}}$$

11.13 PROBLEMAS.

PROBLEMA 1. Probar que $\quad \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\, x \quad$ si $|x| \leq 1$.

SOLUCION. Sea $\quad y = \text{arc sen}\, x \quad$ o $\quad x = \text{sen}\, y$, donde $\quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

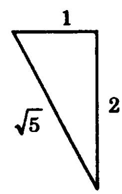
Tenemos $\quad 0 \le \frac{\pi}{2} - y \le \pi \quad$ y $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = -\operatorname{sen}(-y) = \operatorname{sen} y = x.$

Por lo tanto, por la definición 11.7 de la función arco coseno, se tiene

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x.$$

PROBLEMA 2. Hallar $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,tg}(-2)\right)$.

SOLUCION. Sea $\theta = \operatorname{arc\,tg}(-2)$.



Luego $\quad \operatorname{tg}\theta = -2 \quad$ y $\quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Luego $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

PROBLEMA 3. Encontrar el valor de

(1) $y = x \operatorname{arc\,sen} x \quad$ en $x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ (2) $y = \operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} x\right)$ en $x = 1$.

SOLUCION.

(1) Sea $u = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}$. Luego $\frac{1}{2} = \operatorname{sen} u$,

$-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ y el único valor u que satisface ambas condiciones es $u = \frac{\pi}{6}$. Luego $y = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}$.

(2) Sea $u = \operatorname{arc\,tg} 1$. Luego $1 = \operatorname{tg} u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, y el único valor de u que satisface ambas condiciones es $u = \frac{\pi}{4}$.

Luego $\quad y = \operatorname{sen}\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 4. Hallar $\operatorname{arc\,sen}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

SOLUCION. Tenemos $u = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $v = \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}}{2}$ si y sólo si $\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} v$ y $-\frac{\pi}{2} \le v < \frac{\pi}{2}$

El único valor de v que satisface ambas condiciones es $\frac{\pi}{6}$.

PROBLEMA 5. Hallar $\cos\left[2\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{12}{13}\right)\right]$.

SOLUCION. Sea $u = \text{arc sen}\left(-\frac{12}{13}\right)$. Luego $\text{sen}\, u = -\frac{12}{13}$, $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$

Tenemos $\cos 2u = 1 - 2\,\text{sen}^2 u = 1 - 2.\left(\frac{12}{13}\right)^3 = -\frac{119}{169}$.

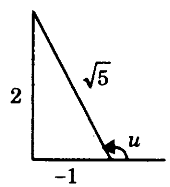
PROBLEMA 6. Dado el valor $u = \text{arc ctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$, hallar

(1) sen u **(2)** sec u **(3)** cosec u .

SOLUCION. Por definición de la función arco cotangente tenemos

$$u = \text{arc ctg}\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{si y sólo si} \quad -\tfrac{1}{2} = \text{ctg}\, u \quad \text{y} \quad 0 < u < \pi..$$

Luego



RESPUESTAS.

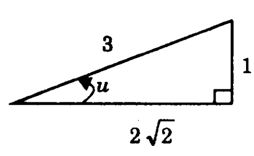
(1) $\text{sen}\, u = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **(2)** $\sec u = -\sqrt{5}$ **(3)** $\text{cosec}\, u = \frac{\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMA 7. Hallar el valor de $\cos\left(\text{arc sen}\,\frac{1}{3} - \text{arc tg}\,\frac{1}{2}\right)$.

SOLUCION. Sean $u = \text{arc sen}\,\frac{1}{3}$, $v = \text{arc tg}\,\frac{1}{2}$ **(1)**

Tenemos $\cos(u - v) = \cos u . \cos v + \text{sen}\, u . \text{sen}\, v$ **(2)**

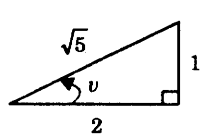
De (1) sabemos que $\text{sen}\, u = \dfrac{1}{3}$,



$-\dfrac{\pi}{2} \le u \le \dfrac{\pi}{2}$.

Luego $\cos u = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\text{sen}\, u = \dfrac{1}{2}$.

Y $\text{tg}\, v = \dfrac{1}{2}$



$-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}$,

Luego $\text{sen}\, v = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos v = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Sustituyendo en (2) los valores obtenidos

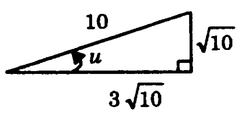
$$\cos(u-v) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{4\sqrt{10}+\sqrt{5}}{15} .$$

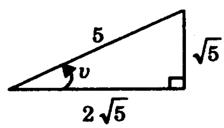
PROBLEMA 8. Hallar $\arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{10}\right)$.

SOLUCION. Sean $u = \arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $v = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tenemos $\cos u = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $0 \le u \le \pi$,

$\cos v = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $0 \le v \le \pi$,





Luego $0 \le u+v \le \pi$ ya que $u, v \le \frac{\pi}{2}$ (ver figuras) ,

y $\cos(u+v) = \cos u \,.\, \cos v - \operatorname{sen} u \,.\, \operatorname{sen} v$

$$= \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Luego por definición de arco coseno

$$u+v = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} .$$

PROBLEMA 9. Derivada de la función arco cotangente.

Probar que $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$, para todo x.

SOLUCION. Para la fórmula de la derivada de la función inversa tenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\operatorname{ctg} y} , \qquad \text{donde} \quad x = \operatorname{ctg} y .$$

Pero $$\frac{d}{dy}\operatorname{ctg} y = -\operatorname{cosec}^2 y = -\left(1+\operatorname{ctg}^2 y\right) = -1-x^2 ,$$

y sustituyendo este valor resulta la fórmula deseada.

PROBLEMA 10. Calcular $y = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,sec}\left(\frac{5}{3}\right) + \operatorname{arc\,cosec}\left(-\frac{13}{2}\right)\right]$.

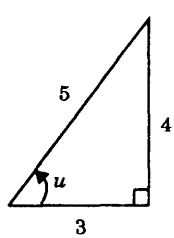
SOLUCION. Tenemos $$y = \operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u \,.\, \operatorname{tg} v} \qquad \textbf{(1)}$$

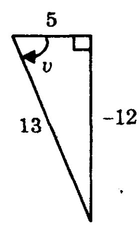
donde $u = \operatorname{arc\,sec}\left(\frac{5}{3}\right)$, $\quad v = \operatorname{arc\,cosec}\left(-\frac{13}{12}\right)$.

Pero $\sec u = \frac{5}{3}$, $\quad 0 \le u \le \pi$, (definición de arco secante)

y $\operatorname{cosec} v = -\frac{13}{12}$, $\quad -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$ (definición de arco cosecante).

Luego





de donde $\operatorname{tg} u = \dfrac{4}{3}$ y $\operatorname{tg} v = -\dfrac{12}{5}$.

Sustituyendo estos valores en (1) resulta $y = -\dfrac{16}{63}$.

PROBLEMA 11.

(1) Probar que $$\operatorname{arc\,sec} x = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para } |x| \ge 1$$

(2) Probar que $$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \text{ para } |x| \ge 1 .$$

SOLUCION.

(1) Puesto que $|x| \geq 1$ se tiene $-1 \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$.

Luego el valor $y = \text{arc cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ es determinado de acuerdo a la definición de 11.2.

Es decir $\cos y = \dfrac{1}{x}$, donde $0 \leq y \leq \pi$;

pero $y \neq \dfrac{\pi}{2}$ pues $\dfrac{1}{x} \neq 0$, o sea $\cos y \neq 0$.

Tenemos entonces $\sec y = x$, donde $0 \leq y \leq \pi$,

y por lo tanto $y = \text{arc sec}\, x$, por la definición de 11.10.

Esto prueba la igualdad deseada.

(2) Tenemos

$$\frac{d}{dx}\text{arc sec}\, x = \frac{d}{dx}\left[\text{arc cos}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \qquad \text{(por (1))}$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\text{arc cos}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\dfrac{x^2}{|x|}\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|.\sqrt{x^2-1}}$$

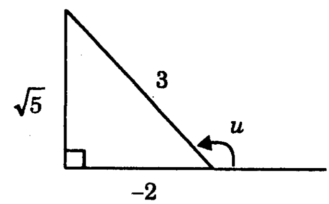
PROBLEMA 12. Calcular $y = \text{sen}\left[\text{arc cos}\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\,\text{arc sen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

SOLUCION.

(1) Tenemos $u = \text{arc cos}\left(-\frac{2}{3}\right)$ si y sólo si $\cos u = -\frac{2}{3}$ y $0 \leq u \leq \pi$.

Luego

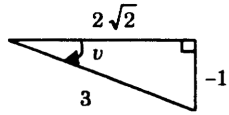
$$\text{sen}\, u = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



(2) Tenemos

$$v = \text{arc sen}\left(-\tfrac{1}{3}\right) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen}\, v = -\tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le v \le \tfrac{\pi}{2} \,.$$

Luego



$$\cos v = \frac{2\sqrt{2}}{3} \,.$$

Resulta entonces

$$\text{sen}\, 2v = 2\, \text{sen}\, v \,.\, \cos v = -\tfrac{4\sqrt{2}}{9} \,,$$

$$\cos 2v = \cos^2 v - \text{sen}^2 v = \tfrac{7}{9} \,.$$

Finalmente empleando los valores obtenidos calculamos el valor de y :

$$y = \text{sen}\,(u + 2v) = \text{sen}\, u \,.\, \cos 2v + \text{sen}\, 2v \,.\, \cos u = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(\tfrac{7}{9}\right) + \left(\tfrac{-4\sqrt{2}}{9}\right)\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{7\sqrt{5} + 8\sqrt{2}}{27} \,.$$

PROBLEMA 13. Hallar el valor de $\quad y = 2\,\text{arc tg}\left(\tfrac{1}{3}\right) - \text{arc tg}\left(-\tfrac{1}{7}\right)$.

SOLUCION. Tenemos $\quad u = \text{arc tg}\left(\tfrac{1}{3}\right)$,

$$\text{tg}\, u = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le u \le \tfrac{\pi}{2} \,,$$

$$\text{tg}\, 2u = \frac{2\ \text{tg}\, u}{1 - \text{tg}^2 u} = \frac{3}{4} \,, \qquad \textbf{(A)}$$

y $\quad v = \text{arc tg}\left(-\tfrac{1}{7}\right)$,

$$\text{tg}\, v = -\frac{1}{7} \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(B)}$$

Luego $\quad y = 2u - v$

$$\text{tg}\, y = \frac{\text{tg}\, 2u - \text{tg}\, v}{1 + \text{tg}\, 2u \,.\, \text{tg}\, v} = 1 \,.$$

Para despejar el valor de y en términos de la función arco tangente nos falta determinar el intervalo en el que se encuentra el valor de y.

Ahora bien de (A) vemos que $2u$ se encuentra en el primer cuadrante,

y de (B) que v se encuentra en el cuarto cuadrante.

Luego $-v$ está en el primer cuadrante, y por lo tanto la suma

$y = 2u + (-v)$ está en el primer o segundo cuadrante.

Finalmente, puesto que $\operatorname{tg} y > 0$ debemos tener $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Luego tenemos $\operatorname{tg} y = 1$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$,

y esto significa que $y = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEMA 14. Derivada de la función arco cosecante.

Probar que $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cosec} x = \frac{-1}{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$, para $|x| > 1$.

SOLUCION. Por la derivada de la función inversa tenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cosec} x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\operatorname{cosec} y}, \tag{A}$$

donde $x = \operatorname{cosec} y$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Pero $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} y = -\operatorname{cosec} y \cdot \operatorname{ctg} y = -x \cdot \operatorname{ctg} y$,

y $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{cosec}^2 y - 1 = x^2 - 1$

$\operatorname{ctg} y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$.

Ahora bien, si $x < -1$ entonces $-\frac{\pi}{2} \le y < 0$, y $\operatorname{ctg} y < 0$,

y si $x > 1$, entonces $0 < y < \frac{\pi}{2}$, y $\operatorname{ctg} y > 0$.

Así, $$\frac{d}{dy}\operatorname{cosec} y = \begin{cases} x\sqrt{x^2-1} & \text{si } x<-1 \\ -x\sqrt{x^2-1} & \text{si } x>1, \end{cases}$$

y resumiendo en una simple expresión

$$\frac{d}{dy}\operatorname{cosec} y = -|x|.\sqrt{x^2-1}\,, \qquad \text{para } |x|>1\,.$$

Sustituyendo este valor en (A) produce la igualdad deseada.

Nota. Se puede hallar la derivada de la función arco cosecante procediendo como en el problema 11.

Esto es, primero se demuestra la igualdad $\operatorname{cosec}(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $|x|\geq 1$, y luego se derivan ambos miembros.

PROBLEMA 15. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

(1) $y = \operatorname{arc\,tg} 2x^3$ **(2)** $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ **(3)** $y = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

SOLUCION. Aplicamos directamente las fórmulas establecidas en la tabla 11.12.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{d}{dx}2x^3}{1+(2x^3)^2} = \dfrac{6x^2}{1+4x^6}$, donde hemos tomado $v = 2x^3$.

(2) Haciendo $v = \sqrt{1-x^2}$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x^2}} = \frac{-x}{|x|.\sqrt{1-x^2}}\,.$$

(3) Si $v = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ entonces $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2x}{|x|.(1+x^2)}\,.$$

PROBLEMA 16. Derivar las siguientes funciones

(1) $y = \text{arc cos}\,\dfrac{x}{a} \qquad (a > 0)$

(2) $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a\,\text{arc sen}\,\dfrac{x}{a} \qquad (a > 0)$

(3) $y = \text{arc tg}\,\dfrac{a + x}{1 - ax}$

(4) $y = \text{arc cos}(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

SOLUCION.

(1) Tomemos $v = \dfrac{x}{a}$. Luego

$$\frac{d}{dx}\text{arc cos}\,\frac{x}{a} = \frac{-\dfrac{1}{a}}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,, \qquad \text{puesto que } a > 0$$

(2) Tenemos $$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - a.\frac{\dfrac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \frac{-x - a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,.$$

(3) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a + x}{1 - ax}\right)}{1 + \left(\dfrac{a + x}{1 - ax}\right)^2} = \frac{\dfrac{1 + a^2}{(1 - ax)^2}}{\dfrac{(1 - ax)^2 + (a + x)^2}{(1 - ax)^2}} = \frac{1 + a^2}{\left(1 + a^2\right)\left(1 + x^2\right)} = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{d}{dx}(1 - x)}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}} + \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= \frac{(2 - x)\sqrt{2x - x^2}}{x\,(2 - x)} = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x}\,.$$

PROBLEMA 17. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(1) $y = \text{arc sec}\,\dfrac{x}{2}$ (2) $y = \text{arc sen}\, x^{3/2}$

(3) $y = \text{arc cosec}\,\dfrac{1}{x}$ (4) $y = \text{arc ctg}\,\dfrac{x}{3}$

(5) $y = x^2 \text{arc cos}\, x$.

SOLUCION.

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\left|\dfrac{x}{2}\right|\sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 1}} = \frac{2}{|x|.\sqrt{x^2-4}}\,.$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right)}{\sqrt{1-\left(x^{3/2}\right)^2}} = \frac{3\,x^{1/2}}{2\sqrt{1-x^3}}\,.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left|\dfrac{1}{x}\right|\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 1}} = \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\left|\dfrac{1}{x}\right|^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2} = \frac{-3}{x^2+9}\,.$$

(5) $$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,\text{arc cos}\,x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

PROBLEMA 18. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones

(1) $y = \sqrt{9-x^2} + 3 \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{3}$ (2) $y = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc\,sen} x$

(3) $y = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ (4) $y = \sqrt{\operatorname{arc\,sen} 5x}$.

SOLUCION.

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}\ .$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x . \dfrac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x}{1+x^2} + \operatorname{arc\,tg} x}{x^2} = \frac{x + \left(1-x^2\right)\operatorname{arc\,tg} x}{x^2\left(1+x^2\right)}\ .$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} 5x)}{2\sqrt{\operatorname{arc\,sen} 5x}} = \frac{\dfrac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}}{2\sqrt{\operatorname{arc\,sen} 5x}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{\left(1-25x^2\right)\operatorname{arc\,sen} 5x}}\ .$$

PROBLEMA 19. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(1) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1-x^2}$ (2) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{2}{x}$

(3) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{arc\,cos} x)$ (4) $y = \operatorname{arc\,sec} \sqrt{x^2+1}$.

SOLUCION.

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2+4x^2} = \frac{2}{1+x^2}\,.$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} - \frac{-\dfrac{2}{x^2}}{1+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2} = \frac{4}{x^4+4}\,.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}(\text{arc cos } x)}{\sqrt{1-(\text{arc cos } x)^2}} = \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(\text{arc cos } x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{\left[1-x^2\right].\left[\,1-(\text{arc cos } x)^2\right]}}\,.$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\,.\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}} = \frac{x}{|x|\left(x^2+1\right)}\,.$$

PROBLEMA 20. Usando derivación implícita hallar $\dfrac{dy}{dx}$

(1) $x \text{ sen } y + x^3 = \text{arc tg } y$ (2) $\text{arc sen }(xy) = \text{arc cos }(x+y)$.

SOLUCION.

(1) Tenemos $$\text{sen } y + x \cos y.\frac{dy}{dx} + 3x^2 = \frac{\dfrac{dy}{dx}}{1+y^2}$$

Luego despejando $y' = \dfrac{dy}{dx}$ resulta

$$y' = \frac{\left(3x^2+\text{sen } y\right)\left(1+y^2\right)}{1-\left(1+y^2\right)x\cos y}\,.$$

(2) $$\frac{\frac{d}{dx}(xy)}{\sqrt{1-(xy)^2}} = \frac{-\frac{d}{dx}(x+y)}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$$

$$[y+x.y']\sqrt{1-(x+y)^2} = -[1+y']\sqrt{1-(xy)^2}$$

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2y^2} + y\sqrt{1-(x+y)^2}}{\sqrt{1-x^2y^2} + x\sqrt{1-(x+y)^2}}\ .$$

PROBLEMA 21. Hallar la derivada de las siguientes funciones

(1) $y = \dfrac{\left(1+x^2\right)\text{arc tg}\,x - x}{2}$ (2) $y = \text{arc sen}\,x^2 + \text{arc cos}\,x^2$

(3) $y = \text{arc tg}\,\dfrac{x\,\text{sen}\,a}{1-x\cos a}$ (4) $y = \frac{2}{3}\,\text{arc tg}\,\dfrac{5\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+4}{3}\ .$

SOLUCION.

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[2x.\text{arc tg}\,x + \left(1+x^2\right)\cdot\frac{1}{1+x^2} - 1\right] = x.\text{arc tg}\,x\ .$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0\,.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{x\,\text{sen}\,a}{1-x\cos a}\right]}{1+\left[\frac{x\,\text{sen}\,a}{1-x\cos a}\right]^2}$$

$$= \frac{(1-x\cos a)\,\text{sen}\,a - (x\,\text{sen}\,a)(-\cos a)}{(1-x\cos a)^2 + x^2\,\text{sen}^2\,a}$$

$$= \frac{\text{sen}\,a}{1-2x\cos a + x^2}\ .$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}+4}{3}\right]}{1+\left[\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}+4}{3}\right]^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{5}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}\right]}{\dfrac{1}{9}\left|25\sec^2\dfrac{x}{2}+40\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right|} = \frac{1}{5+4\,\mathrm{sen}\,x}\,.$$

PROBLEMA 22. Calcular la derivada de las siguientes funciones

(1) $y = 3\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} - (3+2x)\sqrt{x-x^2}$

(2) $y = -\sqrt{2}\,.\,\mathrm{arc\,ctg}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right) - x\,.$

SOLUCION.

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3\cdot\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{1+\left(\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\right)^2} - 2\sqrt{x-x^2} - \frac{(3+2x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x-x^2}} - 2\sqrt{x-x^2} - \frac{(3+2x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{8x^2}{2\sqrt{x-x^2}} = 4x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\cdot\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)^2} - 1 = \frac{2\sec^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x} - 1 = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{1+\cos^2 x}\,.$$

PROBLEMA 23. Encontrar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de la función y dada por las funciones paramétricas

$$x = \mathrm{arc}\cos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\qquad y = \mathrm{arc\,sen}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}} = \frac{t\left(1+t^2\right)^{-3/2}}{\sqrt{\dfrac{t^2}{1+t^2}}} = \frac{t}{|t|\left(1+t^2\right)}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}} = \frac{1}{\left(1+t^2\right)}.$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} -1 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t>0. \end{cases}$$

PROBLEMA 24. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(-3,4)$ si $\sqrt{x^2+y^2} = 2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} + C$.

SOLUCION. Derivando la ecuación implícita respecto de x

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = 2\cdot\frac{\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = 2\cdot\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2+y^2},$$

de donde $$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+2y}{2x-y\sqrt{x^2+y^2}}$$

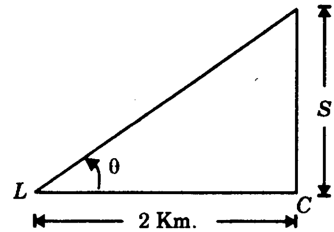
y evaluando en $x=-3$, $y=4$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{26}.$$

PROBLEMA 25. Una luz está a 2 Km. de una playa recta y da vueltas a 4 r.p.m. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra de la luz a lo largo de la playa cuando la sombra está a 3 Km. del punto en la playa más cercano a la luz?

SOLUCION.

Tenemos



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4(2\pi)\,\text{radianes}}{\text{min}} = 8\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{min}} ,$$

$$S = 2\ \text{tg}\,\theta \quad \text{(ver figura)}$$

y $$\frac{dS}{d\theta} = 2\ \sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} .$$

Para $S = 3$ se tiene $3 = 2\,\text{tg}\,\theta$,

$$\text{tg}\,\theta = \tfrac{3}{2} ,$$

y $$\sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\theta = \tfrac{13}{4} ,$$

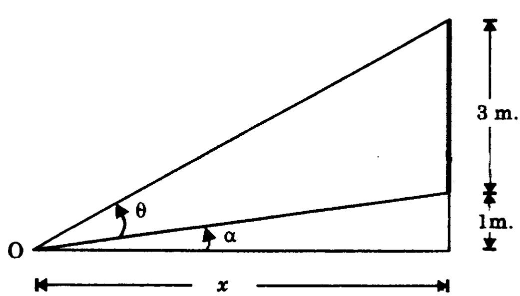
y por lo tanto $$\frac{dS}{dt} = 2\left(\tfrac{13}{4}\right)(8\pi)\ \text{Km/min}$$

$$= 52\pi\ \text{Km/min}.$$

PROBLEMA 26. Un cuadro de 3 m. de altura se coloca sobre una pared vertical con su base 1 m. arriba del nivel del ojo de un observador.

Si el observador se acerca a la pared a razón de 5 m/min hallar la rapidez con que cambia la medida del ángulo subtendido por el cuadro desde el ojo del observador, cuando éste se encuentra a 3 metros de la pared.

SOLUCION.



En la figura el punto 0 corresponde a la posición del ojo del observador.

Tenemos $4 = x \operatorname{tg}(\theta+\alpha),$

$1 = x \operatorname{tg}\alpha$

Luego $\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{4}{x}\right) - \alpha$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right),$

de donde
$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{4}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

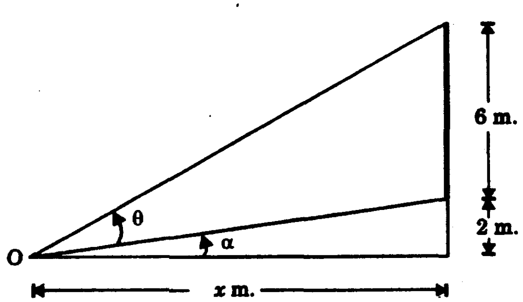
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-4}{x^2+4^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{1}{x^2+1^2}\cdot\frac{dx}{dt},$$

y para $x = 3\,\text{m}$, $\frac{dx}{dt} = -5$ m/min (el signo es menos pues x decrece) resulta

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}\ \text{m/min}.$$

PROBLEMA 27. Una estatua de 6 m. de alto tiene su base a 2 m. arriba del nivel del ojo de un observador. ¿A qué distancia de la estatua debe colocarse el observador para el ángulo subtendido desde su ojo por la estatua sea máximo?

SOLUCION.



Buscamos el valor de x que hace θ máximo.

Tenemos $x = 2 \operatorname{ctg}\alpha$

$x = 8 \operatorname{ctg}(\theta+\alpha)$.

Luego
$$\alpha = \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$\theta+\alpha = \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{x}{8}\right),$$
$$\theta = \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{x}{8}\right) - \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{x}{2}\right),$$

y
$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\frac{1}{8}}{1+\left(\frac{x}{8}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{6\left(16-x^2\right)}{\left(64+x^2\right)\left(4+x^2\right)} = \frac{6\,(x+4)\,(x-4)}{\left(64+x^2\right)\left(4+x^2\right)}.$$

Por las condiciones del problema consideramos solamente valores de $x>0$ y por lo tanto

x	θ'	CONCLUSIONES SOBRE θ
$0<x<4$	+	es creciente
$x=4$	0	tiene un máximo relativo
$4<x$	–	es decreciente

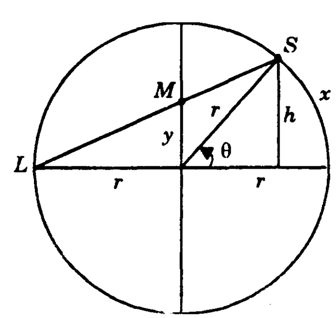
Luego θ tiene exactamente un extremo relativo en $x=4$ en el intervalo $(0,+\infty)$, y por el teorema 1 de 10.12, tiene un extremo absoluto allí.

Luego $\theta_{\text{max.abs.}}$ se obtiene en $x=4$ m.

PROBLEMA 28. Un cuerpo M se mueve a razón de 5 m/seg a lo largo de un diámetro de un patio circular.

Una luz ubicada en uno de los extremos de un diámetro perpendicular al anterior proyecta la sombra de M sobre la pared circular.

¿Con qué rapidez se mueve la sombra a lo largo de la pared cuando M se encuentra a $\frac{r}{2}$ m. del centro del patio, donde r metros es el radio del patio?



SOLUCION.

En la figura tenemos $\theta = \dfrac{x}{r}$ (1)

$h = r \operatorname{sen} \theta$ (2)

$\dfrac{h}{y} = \dfrac{r + r\cos\theta}{r}$ (3) (por semejanza de triángulos)

De (2) y (3) obtenemos

$$r \operatorname{sen} \theta = y(1+\cos\theta)$$

$$y = r \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

(pues $\operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} \cos\dfrac{\theta}{2}$, $1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$).

Así $\theta = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{r}\right)$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dfrac{2}{r}}{1+\left(\dfrac{y}{r}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{2r}{y^2+r^2}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (4)$$

y de (1) $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2r^2}{y^2+r^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}$.

Luego para $y = \dfrac{r}{2}$, $\dfrac{dy}{dt} = 5$, resulta $\dfrac{dx}{dt} = 8$ m/seg.

PROBLEMA 29. Probar que $\dfrac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{239}\right)$

PROBLEMA 30. Demostrar $\dfrac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{4}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{20}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{1985}\right)$

PROBLEMA 31. Sea $-1 < x < 1$. Si n es un entero positivo se definen

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

y $\qquad R_n(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) - P_n(x)$

a) Usando la identidad $\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = 1+r+r^2+\ldots+r^n$ con $r=-x^2$ probar que

$R_n'(x)$ es igual a $(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$,

b) Aplicando el teorema del valor medio (10.2) a la función $R_n(x)$, en el intervalo determinado por 0 y x, demostrar que $|R_n(x)| \leq |x|^{2n+3}$ y $\operatorname{arc\,tg}(x) \cong P_n(x)$ con un error menor que $|x|^{2n+3}$

c) Probar que $\operatorname{arc\,tg}(x)$, $-1<x<1$, es la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

PROBLEMA 32.

a) Calcular el valor de π con 3 dígitos decimales, esto es con un error menor que 0.001, usando la identidad del problema 29

$$\pi \cong 16\times P_2(1/5) - 4\times P_1(1/239)$$

y los valores aproximados $P_2(1/5)$ de $\operatorname{arc\,tg}(1/5)$ y $P_1(1/239)$ de $\operatorname{arc\,tg}(1/239)$, dados por b), problema 31.

b) Hallar m y n tales que $P_m(1/5)$ y $P_n(1/239)$ den un valor de π con un error menor que 10^{-6}.

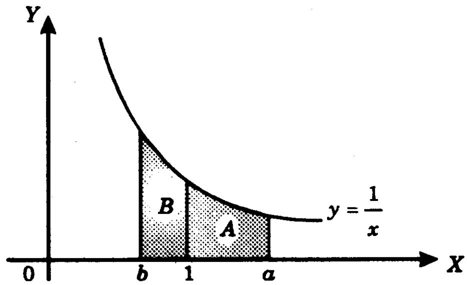
Indicación: m y n pueden ser elegidos de modo que $16\times(1/5)^{2m+3}$ y $4\times(1/239)^{2n+3}$ sean menores que $10^{-6}/2$

FUNCIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIAL.

11.14 LA FUNCION LOGARITMO NATURAL.

Definición. Para todo $x>0$ se define la función $\ln x$ de la siguiente manera

$$\ln x = \begin{cases} \text{área bajo la curva } y=\dfrac{1}{x} \text{ entre } 1 \text{ y } x, \text{ si } x\geq 1 \\ -\text{área bajo la curva } y=\dfrac{1}{x} \text{ entre } x \text{ y } 1, \text{ si } 0<x<1. \end{cases}$$



Así en la figura $\qquad \ln a$ = área de A , $\ln b$ = − área de B.

Nota.

(1) De la definición se tiene $\begin{cases} \ln x > 0 & \text{si} \quad x > 1 \\ \ln 1 = 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ \ln x < 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

(2) La definición que hemos dado de la función *logaritmo natural,* $\ln x$, se basa en nuestra idea geométrica de *área bajo una curva.*

Cuando se define el concepto de integral definida (Cálculo integral) se prueba que la curva $y = \dfrac{1}{x}$, que es continua sobre el intervalo $(0, +\infty)$, tiene área sobre cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, donde $0 < a < b$, la cual puede ser calculada como el límite de la suma de las áreas de rectángulos inscritos (o circunscritos) a la curva, y cuyas bases se encuentran en el intervalo $[a, b]$

Lema. Si $0 < a < b$, entonces se cumple

$$\ln b - \ln a \ = \ \text{área bajo la curva } y = \frac{1}{x} \text{ entre } a \text{ y } b.$$

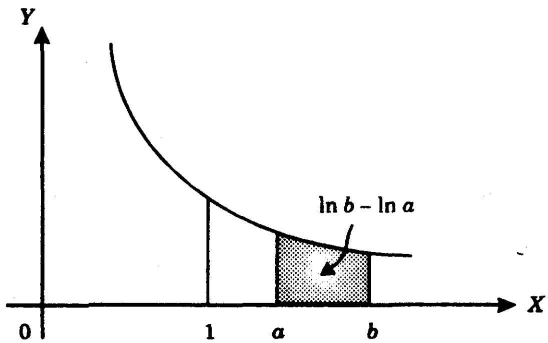
Prueba. Tenemos

(1) Si $1 \le a < b$ entonces

$\ln b$ = área bajo la curva entre 1 y b ,

$\ln a$ = área bajo la curva entre 1 y a ,

y $\quad \ln b - \ln a$ = área bajo la curva entre a y b , (ver figura).



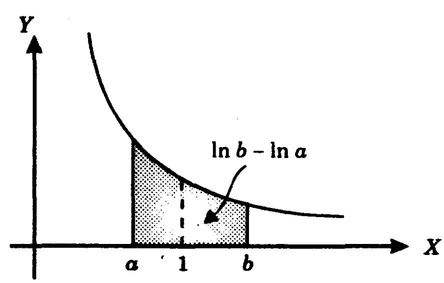
(2) **Si** $0 < a < 1 < b$ entonces

$$\ln b = \text{área bajo la curva entre } 1 \text{ y } b,$$

$$\ln a = -\text{área bajo la curva entre } a \text{ y } 1,$$

y $$\ln b - \ln a = (\text{área entre } 1 \text{ y } b) + (\text{área entre } a \text{ y } 1)$$

$$= \text{área entre } a \text{ y } b.$$



(3) **Si** $0 < a < b < 1$ se procede en forma análoga.

Así la prueba del lema queda concluída.

TEOREMA 1. Derivada de la función logaritmo natural.

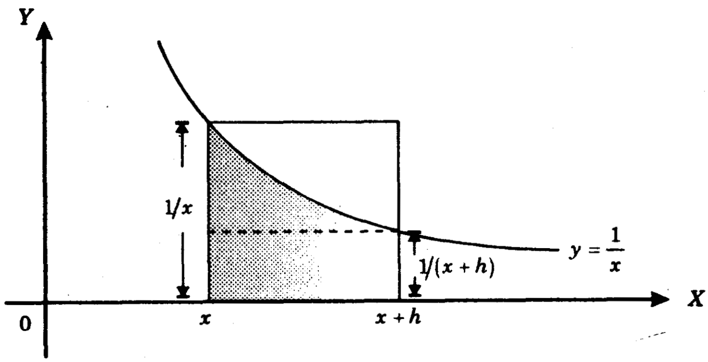
La función $\ln x$ es diferenciable y para todo $x > 0$, se cumple

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

PRUEBA. Fijemos un $x > 0$. Debemos probar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$

Caso 1: $h > 0$. Tenemos



Area del rectángulo inscrito < Area bajo la curva entre x y $x+h$

< Area del retángulo circunscrito ,

y sustituyendo $\ln(x+h) - \ln x$, de acuerdo al lema anterior,

$$h \cdot \left(\frac{1}{x+h}\right) < \ln(x+h) - \ln x < h \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x},$$

restando $\frac{1}{x}$ en los tres términos

$$\frac{-h}{x(x+h)} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} - \frac{1}{x} < 0$$

lo cual implica

$$\left| \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} - \frac{1}{x} \right| < \frac{h}{x(x+h)} \tag{1}$$

Caso 2: $h < 0$. Mediante un procedimiento análogo al efectuado en el caso (1), se obtiene

$$\left| \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} - \frac{1}{x} \right| < \frac{-h}{x(x+h)} \qquad \textbf{(2)}$$

En resumen, para $|h| > 0$ se cumple

$$\left| \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} - \frac{1}{x} \right| < \frac{|h|}{x(x+h)} \qquad \textbf{(3)}$$

Ahora bien, cuando $h \to 0$, el segundo miembro de $(3) \to 0$, y por lo tanto, por el teorema del sandwich,

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} - \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x},$$

lo cual significa que $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$.

Nota. Si $v = v(x)$ es una función diferenciable > 0 entonces por la regla de la cadena y la fórmula de la derivada de $\ln x$ se tiene

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

En efecto $\dfrac{d}{dx}\ln v = \left(\dfrac{d}{dv}\ln v\right)\cdot\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

EJEMPLO 1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

SOLUCION. Tenemos $v = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ y por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

EJEMPLO 2. Probar que si v es una función diferenciable entonces $\frac{d}{dx}\ln|v| = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$

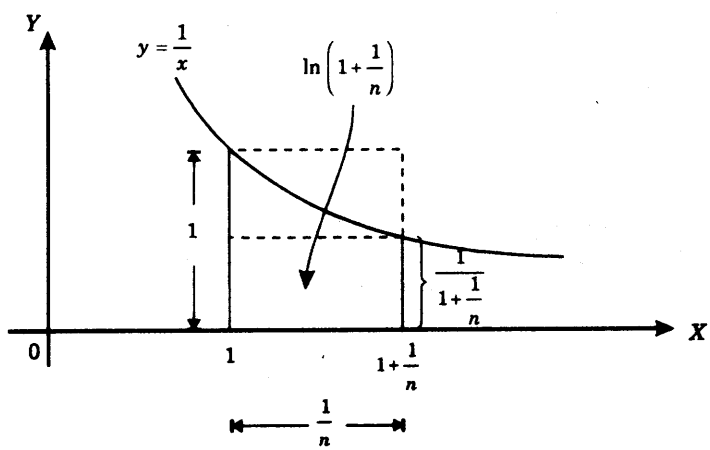
SOLUCION. Escribimos $u = |v| = \sqrt{v^2}$

Luego $\frac{d}{dx}\ln|v| = \frac{d}{dx}\ln u = \left(\frac{d}{du}\ln u\right)\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$ (pues $\frac{d}{du}\ln u = \frac{1}{u}$)

$$= \frac{1}{\sqrt{v^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{v^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{v^2}}\;\frac{2v\frac{dv}{dx}}{2\sqrt{v^2}} = \frac{v}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\,.$$

EJEMPLO 3. Probar que se cumple $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ para todo entero $n \geq 1$.

SOLUCION. Calculando las áreas en la figura siguiente se tiene



Tenemos $$\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{n}\right)\cdot 1$$

Pero $$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n+1}\,,$$

y por lo tanto se cumplen las desigualdades $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMO NATURAL.

TEOREMA 2. Se cumple

(1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, si a y $b > 0$;

(2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, si a y $b > 0$;

(3) $\ln\left(a^r\right) = r \ln a$, si $a > 0$ y r es un número racional;

(4) $\ln x$ es creciente en el intervalo $0 < x < +\infty$;

(5) $\ln x$ toma todo valor real y. En efecto

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ ;$$

(6) $\dfrac{d}{dx} \ln |v| = \dfrac{1}{v} \cdot \dfrac{dv}{dx}$ si $v = v(x)$ es una función diferenciable.

(7) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

PRUEBA

(1) Fijemos $b > 0$ y consideremos la función $\ln ax$

Tenemos $\dfrac{d}{dx}(\ln ax) = \dfrac{1}{ax} \cdot \dfrac{d}{dx}(ax) = \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{d}{dx}(\ln x) \qquad \text{(derivada de } \ln x\text{)}$$

Luego las funciones $\ln(ax)$ y $\ln x$ tienen iguales derivadas y, por el teorema de la diferencia constante, se cumple

$$\ln(ax) = \ln x + C, \text{ para todo } x > 0, \text{ donde } C \text{ es una constante.}$$

Haciendo $x = 0$ se obtiene $\qquad \ln a = \ln 1 + C$

$$C = \ln a \qquad (\text{pues } \ln 1 = 0).$$

Luego $\quad \ln(ax) = \ln x + \ln a$, para todo $x > 0$.

Finalmente, si $x = b$ resulta $\ln(ab) = \ln b + \ln a$,

lo que prueba (1).

(2) Escribiendo $a = \frac{a}{b} \cdot b$, de (1) se tiene

$$\ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \ln \frac{a}{b} + \ln b.$$

Luego $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$

(3) Tomemos $v = x^r$. Se tiene

$$\frac{d}{dx}\ln x^r = \frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^r}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^r\right)$$

$$= \frac{r\,x^{r-1}}{x^r} \quad \text{(derivada de una potencia con exponente fraccionario)}$$

$$= \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x) .$$

Luego por el teorema de la diferencia constante

$\ln x^r = r \ln x + C$, para todo $x > 0$, donde C es una constante.

Haciendo $x = 1$ resulta $\ln 1 = r . \ln 1 + C$, o $0 = 0 + C$.

Luego $C = 0$.

Así tenemos $\ln x^r = r \ln x$, para todo $x > 0$.

En particular para $x = a$ se cumple $\ln a^r = r \ln a$.

(4) Puesto que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$, para $x > 0$,

por el teorema de 10.9, concluimos que $\ln x$ es creciente en el intervalo $0 < x < +\infty$.

(5) Probaremos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Sea dado $N > 0$. Puesto que $\ln 2 > 0$ podemos encontrar un entero n_0 tal que

$$n_0 > \frac{N}{\ln 2} \qquad \text{o} \qquad \ln 2^{n_0} > N.$$

Luego para $x > 2^{n_0}$ se tiene $\ln x > \ln 2^{n_0}$ (pues $\ln x$ es creciente)

$> N$.

Así hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Probaremos que $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$.

Sea dado $N < 0$. Puesto que $\ln 2 > 0$ podemos encontrar un entero $n_0 < 0$ tal que

$$n_0 < \frac{N}{\ln(2)} \quad \text{o} \quad \ln\left(2^{n_0}\right) < N .$$

Luego para $0 < x < 2^{n_0}$ se tiene $\ln x < \ln\left(2^{n_0}\right)$ (pues $\ln x$ es creciente).

$< N$.

Así hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$.

(6) Se ha establecido en el ejemplo 2 de la presente sección.

(7) Tenemos
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \qquad (\ln 1 = 0)$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\ln x\right]_{x=1} \qquad \text{(def. de derivada)}$$

$$= \left[\frac{1}{x}\right]_{x=1} \qquad \text{(derivada de } \ln x\text{)}$$

$$= 1 .$$

DERIVADA LOGARITMICA.

Definición. Se llama *derivada logarítmica* de la función $y = f(x)$ a la derivada del logaritmo de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

El cálculo de la derivada de una función se simplifica algunas veces cuando se toma en primer lugar el logaritmo de la función.

EJEMPLO. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = x \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

SOLUCION.

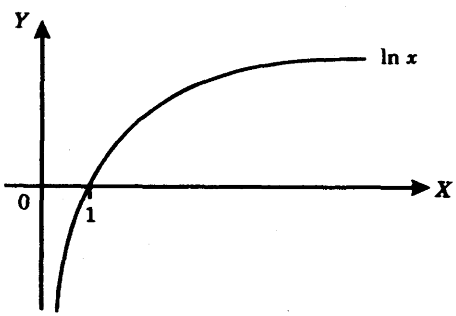
$$\ln y = \ln x + \tfrac{2}{3}\ln x - \tfrac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right),$$

y derivando respecto de x :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3\left(x^2+1\right)} = \frac{3x^2+5}{3x\left(x^2+1\right)}$$

$$y' = \frac{\left(3x^2+5\right)y}{3x\left(x^2+1\right)} = \frac{\left(3x^2+5\right)x^{2/3}}{3\left(x^2+1\right)^{4/3}}$$

Gráfica de la función logaritmo natural.



DATOS

x	$\ln x$
1/2	−0.69
1	0
2	0.69
3	1.10
4	1.39
5	1.61
6	1.79

1. $\ln x$ es creciente
2. $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$
3. $\ln 1 = 0$
4. $\ln x > 0$ si $x > 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

11.15 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(1) $y = \ln(2x+6)$ (2) $y = \ln\left(1+3x^2\right)$

(3) $y = \ln\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$ (4) $y = \ln(\ln x)$.

SOLUCION. Aplicamos la fórmula de la derivada $\dfrac{d\ln v}{dx} = \dfrac{1}{v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$ establecida en la nota del teorema 1 de 11.14.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x+6}\cdot\dfrac{d}{dx}(2x+6) = \dfrac{1}{x+3}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+3x^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(3x^2\right) = \dfrac{6x}{1+3x^2}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) = \dfrac{-x}{a^2-x^2}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

PROBLEMA 2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$

(1) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ (2) $y = \ln\left|x^3+2\right|$

(3) $y = \sqrt{x+a} - a\ln\left(a+\sqrt{x+a}\right)$ (4) $y = \sqrt[3]{\ln x^3}$.

SOLUCION.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\ln x)(2x) - x^2(1/x)}{[\ln x]^2} = \dfrac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$.

(2) Aplicando $\dfrac{d}{dx}\ln|v| = \dfrac{1}{v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$ con $v = x^3+2$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3+2}\left(3x^2\right) = \frac{3x^2}{x^3+2}\,.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} - \frac{a}{a+\sqrt{x+a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+a}}$$

$$= \frac{a+\sqrt{x+a}-a}{2\left(\sqrt{x+a}\right)\left(a+\sqrt{x+a}\right)} = \frac{1}{2\left(a+\sqrt{x+a}\right)}\,.$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\ln x^3\right)^{-2/3}\cdot\frac{d}{dx}\ln\left(x^3\right) = \frac{1}{x\left(\ln x^3\right)^{2/3}}\,.$$

PROBLEMA 3. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(1) $y = \ln \operatorname{sen} x$

(2) $y = \operatorname{arc\,tg} \ln x$

(3) $y = \operatorname{arc\,sen}(\ln x)$

(4) $y = \ln(\operatorname{arc\,sen} 5x)$

(5) $y = \sqrt{\ln x+1} + \ln\left(\sqrt{x}+1\right)$.

SOLUCION.

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x = \cot x\,.$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\,.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{arc\,sen} 5x}\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} 5x) = \frac{5}{(\operatorname{arc\,sen} 5x)\left(\sqrt{1-25x^2}\right)}\,.$$

(5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}} + \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x}\right)}\,.$$

PROBLEMA 4. Si $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$ hallar $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCION.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{d}{dx}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$$

$$= \frac{2}{3\left(x^2+2\right)} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2\left(x^2-1\right)+\left(x^2+2\right)}{3\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)} = \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)}.$$

PROBLEMA 5. Derivar la función $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$

SOLUCION.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right) - \ln\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right\} = \frac{\left(\sec^2\frac{x}{2}\right)\left(2\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right)\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}+2\right)^2-3} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\text{tg}^2\frac{x}{2}+4\text{tg}\,\frac{x}{2}+1} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}+4\text{tg}\,\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+2\,\text{sen}\,x}.$$

PROBLEMA 6. Derivar la función $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9} - x}$

SOLUCION. Tenemos $y = \ln\left(\sqrt{x^2+9} + x\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+9} - x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + 1}{\sqrt{x^2+9} + x} - \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1}{\sqrt{x^2+9} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+9}} .$$

PROBLEMA 7. Diferenciar $y = \dfrac{m}{2} \ln\left(x^2 - a^2\right) + \dfrac{n}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a}$.

SOLUCION. Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mx}{x^2 - a^2} + \dfrac{n}{2a}\left\{\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right\}$

(pues $\ln \dfrac{x-a}{x+a} = \ln(x-a) - \ln(x+a)$)

$$= \frac{mx+n}{x^2 - a^2} .$$

PROBLEMA 8. Derivar la función $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCION. Tenemos $\ln \dfrac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \ln\left(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) - \ln\left(1-\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{2\cos x}{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{2}{\cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}} .$$

PROBLEMA 9. Derivar la función $y = \dfrac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2 \text{ arc sen } x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} + \frac{x}{1-x^2} + \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\text{arc sen } x\left(1-x^2+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} = \frac{\text{arc sen } x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} .$$

PROBLEMA 10. Probar que la función $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$ satisface la ecuación diferencial $xy' = y(y\ln x - 1)$.

SOLUCION. Tenemos $(1+x+\ln x)\,y = 1$.

Derivando respecto de x : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)y + (1+x+\ln x)\,y' = 0$,

de donde $$y' = -\frac{(x+1)\,y}{x\,(1+x+\ln x)}$$

y $$xy' = -\frac{(x+1)\,y}{1+x+\ln x} \tag{1}$$

Pero $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$,

$$y\ln x - 1 = \frac{\ln x}{1+x+\ln x} - 1 = -\frac{(1+x)}{1+x+\ln x} \tag{2}$$

y sustituyendo (2) en (1) $\quad xy' = y(y\ln x - 1)$.

PROBLEMA 11. Si $f(x) = \ln(1+x) + \text{arc sen}\dfrac{x}{2}$ encontrar $\dfrac{df}{dx}(1)$.

SOLUCION.

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

y reemplazando $x = 1$ resulta

$$\frac{df}{dx}(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

PROBLEMA 12. Diferenciar la función

$$y = \frac{3}{4} \cdot \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x .$$

SOLUCION.

$$y = \frac{3}{4}\left[\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(x^2-1\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\left[\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right] + \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$$

$$= -\frac{3x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)} + \frac{1}{2\left(x^2-1\right)} + \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

$$= \frac{-6x+6x^2}{2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)} = \frac{3x}{\left(x^2+1\right)(x+1)} .$$

PROBLEMA 13. Usando derivada logarítmica hallar y' para cada una de las siguientes funciones

(1) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x-1)^4}$ (2) $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

SOLUCION.

(1) $\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x-1)$

y derivando respecto de x $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x-1}$,

$$y' = \frac{-5x^2-10x-9}{(x+1)(x+2)(x-1)} \cdot y = -\frac{\left(5x^2+10x+9\right)(x+1)}{(x+2)^4(x-1)^5}$$ (reemplazando y).

(2) $\ln y = 9\ln(x-2) - \frac{5}{2}\ln(x-1) - \frac{11}{2}\ln(x-3)$,

y derivando respecto de x

$$\frac{y'}{y} = \frac{9}{(x-2)} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)} ,$$

$$y' = \frac{2x^2 - 14x + 2}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \cdot y = \frac{\left(x^2 - 7x + 1\right)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x-2)^9}{(x-1)^{5/2}(x-3)^{11/2}}$$

$$= \frac{\left(x^2 - 7x + 1\right)(x-2)^8}{(x-1)^{7/2}(x-3)^{13/2}} .$$

PROBLEMA 14. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ por diferenciación logarítmica si

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x-3)^3}} .$$

SOLUCION. $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) - \frac{3}{2}\ln(x+3)$

y derivando respecto de x

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} ,$$

$$y' = \frac{-10x^2 - 2x + 48}{6(x-1)(x+2)(x+3)} \cdot y$$

$$y' = -\frac{5x^2 + x + 24}{3\,(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}} \qquad \text{(reemplazando } y\text{)}$$

PROBLEMA 15. Si $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$,

hallar $\frac{dy}{dx}$ cuando $t = 1$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \ln t + 1 , \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\ln t}{t^2} + \frac{1}{t^2} ,$$

y por lo tanto $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{-\ln t + 1}{t^2 (\ln t + 1)}$.

Haciendo $t = 1$ obtenemos $\displaystyle \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 1$.

PROBLEMA 16. Hallar y' en cada una de las ecuaciones implícitas siguientes

(1) $\displaystyle \ln y + \frac{x}{y} = c$ (2) $\displaystyle \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

SOLUCION.

(1) Derivando respecto de x : $\displaystyle \frac{y'}{y} + \frac{y - x y'}{y^2} = 0$,

de donde $\displaystyle y' = \frac{y}{x - y}$.

(2) Derivando respecto de x : $\displaystyle \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}$

$$x^2\left[\frac{xy' - y}{x^2}\right] = x + yy'$$

$(x - y)y' = x + y$, de donde $\displaystyle y' = \frac{x + y}{x - y}$.

PROBLEMA 17. Si $\displaystyle y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$. Hallar $\displaystyle \frac{dy}{dx}$ en $(1, 1)$.

SOLUCION. Derivando la ecuación implícita respecto de x :

$$2yy' = 1 + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} \qquad \left(\text{pues } \ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x\right)$$

y evaluando cuando $x=1$, $y=1$:

$$2y' = y'$$
$$y' = 0 \ .$$

PROBLEMA 18. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

SOLUCION.

$$y = \tfrac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3\left(1+x^2\right)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\left(1+x^2\right) - x(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{3\left(1+x^2\right)^2} \ .$$

PROBLEMA 19. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $\begin{cases} x = \operatorname{arc\,tg} t \\ y = \ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

SOLUCION.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}\ , \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = 2t$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\ ,$$

y $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 2+2t^2 \ .$$

PROBLEMA 20. Probar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

SOLUCION. Puesto que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$,

tenemos la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Aplicando la regla de L'Hôspital resulta entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 .$$

PROBLEMA 21. Probar que se cumple $1-\dfrac{1}{x} < \ln x < x-1$ para todo $x>0$, $x \neq 1$.

SOLUCION.

(1) Sea $f(x) = \ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

Entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$,

y por lo tanto

x	$f(x)$	$f'(x)$	CONCLUSION SOBRE $f(x)$
$0<x<1$		(−)	es decreciente
$x=1$	0		
$1<x$		(+)	es creciente

Luego $0 = f(1)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$. Por lo tanto, si $x>0$ y $x \neq 1$ debe cumplirse

$$f(1) < f(x)$$

$$0 < \ln x - 1 + \frac{1}{x}$$

o $$1 - \frac{1}{x} < \ln x ,$$

que es una de las desigualdades pedidas.

(2) Sea $g(x) = x - 1 - \ln x$.

Entonces por un procedimiento análogo al realizado en (1) se obtiene

$$\ln x < x - 1 \qquad \text{para todo } x > 0 , \quad x \neq 1 .$$

PROBLEMA 22. Aplicando la regla de L'Hôspital hallar los siguientes límites

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ **(2)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x) \cdot \ln (x-1)$ **(4)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (\operatorname{sen} mx)}{\ln (\operatorname{sen} nx)}$.

SOLUCION.

(1) Tenemos la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$. Luego

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{3} x^{-2/3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^{1/3}} = 0 .$$

(2) Haciendo $x = 1$ resulta $\infty - \infty$, valor indeterminado.

Tenemos

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + x\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2} .$$

(3) Para $x = 1$ se obtiene $0 \cdot (-\infty)$, valor indeterminado.

Tenemos $\qquad \lim\limits_{x \to 1} (\ln x) \cdot \ln (x-1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln (x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{\dfrac{-1}{x}}{\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 1} \frac{x \ln^2 x}{(x-1)} = -\lim_{x\to 1} \ln^2 x + 2\ln x = 0 .$$

(4) Para $x = 0$ se obtiene $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, valor indeterminado.

Luego $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{sen}\, mx)}{\ln(\text{sen}\, nx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{m \cos mx}{\text{sen}\, mx}}{\dfrac{n \cos nx}{\text{sen}\, nx}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m \cos mx}{n \cos nx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, nx}{\text{sen}\, mx}$$

$$= \frac{m}{n}\left(\lim_{x\to 0} \frac{n \cos nx}{m \cos mx} \right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1 .$$

11.16 LA FUNCION EXPONENCIAL.

Puesto que la función logaritmo natural $\ln y$ cumple la propiedad

$$\frac{d}{dy}(\ln y) = \frac{1}{y} > 0 \qquad \text{para todo } y > 0 ,$$

por el lema de la sección 11.4 podemos concluir lo siguiente

1) $\ln y$ tiene inversa en el intervalo $(0, +\infty)$,

2) ya que $\ln y$ toma todos los valores reales (propiedad 5 del teorema 2 de 11. 14) , la función inversa está definida en todo número real.

   Llamaremos *función exponencial* , y la designamos con $\exp x$, a la función inversa de $\ln y$.

   Lo que hemos expuesto justifica la

Definición. Para todo número real x se define

$$y = \exp x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \ln y \ , \ y > 0 .$$

De la definición se siguen inmediatamente las relaciones

$$y = \exp \ln y \qquad \text{para todo } y > 0\,,$$

$$x = \ln \exp x$$

y

$$\exp x > 0\,, \qquad \text{para todo } x.$$

PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL.

TEOREMA 1.

(1) $\exp 0 = 1$.

(2) $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$, para todo a y b .

(3) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$, para todo a y b .

En particular $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp b}$, para todo b.

(4) $\exp(ra)^r = (\exp a)$, para todo a y número racional r.

(5) DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL. exp es diferenciable y se cumple $\dfrac{d}{dx}(\exp x) = \exp x$.

PRUEBA.

(1) De $\ln 1 = 0$ se tiene $0 = \ln 1$ y por eso

$$\exp 0 = \exp \ln 1 = 1\,.$$

(2) Sean $A = \exp a$ y $B = \exp b$.

Tenemos $a = \ln A$ y $b = \ln B$, y de $a + b = \ln A + \ln B = \ln(A \cdot B)$

resulta $\exp(a+b) = \exp \ln(A \cdot B) = A \cdot B = \exp a \cdot \exp b$.

(3) De (2) $\qquad \exp(a-b)\exp(b) = \exp(a-b+b) = \exp a$,

luego $\qquad \exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$,

y haciendo $a = 0$: $\exp(-b) = \dfrac{\exp 0}{\exp b} = \dfrac{1}{\exp b}$.

(4) Sea $A = \exp a$. Entonces $a = \ln A$, $ra = r \ln A = \ln A^r$,

y $\exp(ra) = \exp \ln A^r = A^r = (\exp a)^r$.

(5) Por definición, $y = \exp x$ es la función inversa de $x = \ln y$.
Aplicando entonces la fórmula de la derivada de la función inversa (Teorema 11.4) tenemos:

$$\frac{d}{dx}(\exp x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\ln y)}\,, \quad \text{donde } y = \exp x\,.$$

Pero $\dfrac{d}{dx}(\ln y) = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\exp x}$, y sustituyendo este valor resulta

$$\frac{d}{dx}(\exp x) = \exp x\,.$$

LA FUNCION EXPONENCIAL GENERAL. EL NUMERO e

Si a es un número positivo y r es un número racional sabemos cómo definir el número a^r .

Haciendo uso de las funciones logaritmo y exponencial vemos que entonces se cumple la igualdad

$$a^r = \exp(r \ln a)\,. \qquad \textbf{(1)}$$

En efecto

$$a^r = \exp \ln a^r \qquad (\text{pues } y = \exp \ln y)$$

$$a^r = \exp(r \ln a) \qquad (\text{pues } \ln a^r = r \ln a)\,.$$

Observemos que el segundo miembro de (1) siempre determina un valor para cualquier número x en lugar del número racional r.

De esta manera resulta razonable dar la siguiente

Definición. Si a es un número positivo y x es cualquier número, definimos

$$a^x = \exp(x \ln a)\,.$$

EJEMPLOS.

(1) $3^{\sqrt{2}} = \exp\left(\sqrt{2} \ln 3\right)$

(2) $\pi^{-\pi} = \exp(-\pi \ln \pi)$

(3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\operatorname{sen} x} = \exp\left(\operatorname{sen} x \ln\left(\frac{2}{5}\right)\right)$.

El NUMERO e

Definición. Se llama *número* e (e por el matemático Euler) al único número real que cumple

$$\ln e = 1 , \quad \text{o equivalentemente} \quad \exp 1 = e .$$

Nota. El valor de e con nueve cifras decimales es $e = 2.71828182$.

NOTACION e^x DE LA FUNCION EXPONENCIAL.

Proposición. Para todo número x se cumple $e^x = \exp x$.

Prueba. En efecto

$$\begin{aligned} e^x &= \exp(x.\ln e) && \text{(definición de } a^x\text{)} \\ &= \exp(x) && \text{(pues } \ln e = 1\text{)} . \end{aligned}$$

Nota. De ahora en adelante adoptaremos la notación e^x, en lugar de $\exp x$, para designar a la función expotencial.
Las propiedades establecidas en el teorema 1 de 11.16 tienen ahora las siguientes expresiones:

(1) $e^0 = 1$,

(2) $e^{a+b} = e^a . e^b$,

(3) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,

(4) $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$,

(5) $e^{ra} = \left(e^a\right)^r$ para todo número a y número racional r,

(6) $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$,

y para el número a^x se tiene

(7) $a^x = e^{x \ln a}$.

PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL GENERAL.

Teorema. Sea a un número positivo. Entonces se cumple

(1) $a^0 = 1$,

(2) $a^1 = a$

(3) $a^{x+y} = a^x . a^y$, para todo x, y.

(4) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$, para todo x, y.

(5) DERIVADA DE a^v. Si $v = v(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(a^v\right) = a^v \cdot \ln a \cdot \frac{dv}{dx}.$$

(6) En particular cuando $a = e$ se tiene

$$\left(e^x\right)^y = e^{xy}, \qquad \text{para todo } x, y.$$

y $$\frac{d}{dx}\left(e^v\right) = e^v \cdot \frac{dv}{dx}, \qquad \text{pues } \ln e = 1.$$

Las pruebas de (1), (2), (3) y (4) se dan en el problema 1 de la sección 11.17, de problemas resueltos. Es claro que (6) se sigue de (4) y (5).

Prueba de (5). Tenemos

$$\frac{d}{dx}a^v = \frac{d}{dx}e^{v\ln a} \qquad (\text{pues } a^v = e^{v\ln a})$$

$$= \frac{d}{dx}e^u \qquad (\text{haciendo } u = v\ln a)$$

$$= \left(\frac{d}{du}e^u\right)\cdot\frac{du}{dx} \qquad (\text{regla de la cadena})$$

$$= e^u \cdot \frac{d}{dx}(v\ \ln a) \qquad \left(\text{pues } \frac{d}{du}e^u = e^u\right)$$

$$= e^{v\ln a}.\ \ln a \cdot \frac{dv}{dx} = a^v \cdot \ln a \cdot \frac{dv}{dx}.$$

EJEMPLO 1. Si $y = 10^{x^2-x}$ hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCION. Aplicamos la fórmula $\dfrac{d}{dx}a^v = a^v \cdot \ln a \cdot \dfrac{dv}{dx}$ con $a = 10$ y $v = x^2 - x$:

$$\frac{dy}{dx} = 10^{x^2-x} \cdot \ln 10 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2 - x\right) = (2x-1)\ \ln 10 \cdot 10^{x^2-x}$$

EJEMPLO 2. Encontrar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de cada una de las siguientes funciones

(1) $y = e^{\operatorname{sen} x}$ **(2)** $y = \operatorname{arc\,cos} 2^x$ **(3)** $y = \sqrt{e^{ax}}$.

SOLUCION.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$.

(2) Sea $v = 2^x$. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} 2^x = \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} v$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} v\right) \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \text{(regla de la cadena)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(2^x\right) ,$$

y puesto que $v^2 = \left(2^x\right)^2 = 2^{2x} = \left(2^2\right)^x = 4^x$

y $\dfrac{d}{dx}\left(2^x\right) = 2^x \ \ln 2$,

resulta $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2^x \ \ln 2}{\sqrt{1-4^x}}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{e^{ax}}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(e^{\frac{ax}{2}}\right)$ (pues $\sqrt{e^{ax}} = \left(e^{ax}\right)^{1/2} = e^{\frac{ax}{2}}$)

$$= e^{\frac{ax}{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} e^{\frac{ax}{2}} .$$

OTRAS PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL.

Teorema. Se cumple

(1) $e^x > 0$, para todo x,

(2) e^x es una función creciente,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

(6) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$,

PRUEBA.

(1) Puesto que $a^2 > 0$ si $a \neq 0$, se tiene

$$e^x = \left(e^{x/2}\right)^2 > 0.$$

(Esta propiedad también se sigue directamente de la definición de $y = e^x$, pues $x = \ln y$ está definida solamente cuando $y > 0$).

(2) De $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x > 0$ (por (1)) se sigue, y gracias al teorema, que e^x es una función creciente.

(3) La función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ es creciente en el intervalo $1 \le x < +\infty$.

En efecto $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$, si $x > 1$.

Luego si $x > 1$ se tiene $f(x) > f(1)$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{e^1}{1}$, $e^x > xe$.

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ge \lim\limits_{x\to+\infty} xe = e \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ y así $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

(4) De $e^{x} = \dfrac{1}{e^{-x}}$ se tiene $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}}$

y como $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^{y}$ (cambiando la variable $y = -x$)

$= +\infty$ (por (3))

resulta $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

(5) Sea $y = (1+x)^{1/x}$. Tenemos

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \quad \text{(definición de } a^{x}\text{)}$$

$$= e^{\left[\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)\right]} \quad \text{(continuidad de } e^{x}\text{).}$$

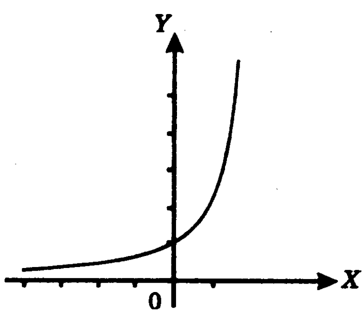
Pero $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln(x+1) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$.

Luego $\lim\limits_{x \to 0} y = e^{1} = e$, y así $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Gráfica de la función exponencial e^{x} .

Algunos valores.

x	e^{x}
−4	0.02
−3	0.05
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
3	20.09



(6) Se demuestra en el problema 12 de 11.17 como una aplicación del teorema de Taylor.

DERIVACION DE UNA EXPONENCIAL CON EXPONENTE ARBITRARIO.

Teorema. Si a es cualquier número real, entonces la función $y = x^a$ es diferenciable en todo $x > 0$, y se cumple

$$\frac{dy}{dx} = a x^{a-1} .$$

Nota. Recordemos que esta propiedad ha sido establecida anteriormente para el caso en el que a es un número racional.

Prueba. Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{a \ln x}\right)$$

$$= e^{a \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(a \ln x) = x^a \cdot \frac{a}{x}$$

$$= a \, . \, x^{a-1} .$$

EJEMPLO 1. Si $y = x^{\pi+1}$ hallar $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCION. $\frac{dy}{dx} = (\pi + 1) x^{\pi}$.

EJEMPLO 2. Dado $y = x^{x^2}$ hallar $y' = \frac{dy}{dx}$

SOLUCION. Usamos la diferenciación logarítmica. Tenemos

$$\ln y = x^2 . \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = 2x . \ln x + \frac{x^2}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = x(2 \ln x + 1)$$

$$y' = x^{x^2+1} . (2 \ln x + 1) ,$$

11.17 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Sea a un número positivo. Probar que se cumple

(1) $a^0 = 1$, (2) $a^1 = a$,

(3) $a^{x+y} = a^x \,.\, a^y$, (4) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.

SOLUCION.

(1) $a^0 = e^{0.\ln a} = e^0 = 1$.

(2) $a^1 = e^{1.\ln a} = e^{\ln a} = a$.

(3) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a}$

$= e^{x\ln a} . e^{y\ln a} = a^x . a^y$.

(4) $\left(a^x\right)^y = e^{y\ln a^x} = e^{yx\ln a}$, pues de $a^x = e^{x\ln a}$ se tiene $\ln a^x = x \ln a$,

$= e^{xy(\ln a)} = a^{xy}$.

PROBLEMA 2. Si a y b son números positivos probar que

$$(ab)^x = a^x . b^x \quad \text{para todo } x.$$

SOLUCION. $(ab)^x = e^{x\ln(ab)}$

$= e^{x\ln a + x\ln b}$ (pues $\ln ab = \ln a + \ln b$)

$= e^{x\ln a} . e^{x\ln b}$

$= a^x . b^x$.

PROBLEMA 3. Encontrar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones

(1) $y = x^6 e^x$ (2) $y = e^x \operatorname{arc\,sen} x$ (3) $y = \sqrt{xe^x + x}$

(4) $y = x^2 . 10^{2x}$ (5) $y = x \operatorname{sen} 2^x$.

SOLUCION.

(1) $y' = 6x^5.e^x + x^6.e^x = x^5(6+x)e^x$.

(2) $y' = e^x \operatorname{arc\,sen} x + e^x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$= e^x \left(\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

(3) $y' = \dfrac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$.

(4) $y' = 2x.10^{2x} + x^2 \cdot \dfrac{d}{dx}\left(10^{2x}\right)$

$$= 2x.10^{2x} + x^2.10^{2x} \ln 10(2)$$

$$= 2x.10^{2x} \ (1 + x \ln 10) \ .$$

(5) $y' = \operatorname{sen} 2^x + x.\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} 2^x\right)$

$$= \operatorname{sen} 2^x + x \cos 2^x \cdot \frac{d}{dx}\left(2^x\right)$$

$$= \operatorname{sen} 2^x + \left(x \cos 2^x\right) 2^x .\ln 2 \ .$$

PROBLEMA 4. Hallar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones

(1) $y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$ (2) $y = e^{ax} \cos bx$

(3) $y = 3^{\cot 1/x}$ (4) $y = \dfrac{1}{10} e^{-x}(3\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$.

SOLUCION.

(1) $y' = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) = \operatorname{sen} 2x.e^{\operatorname{sen}^2 x}$.

(2) $y' = a e^{ax}.\cos bx + e^{ax}(-b \text{ sen } bx) = e^{ax}(a \cos bx - b \text{ sen } bx)$.

(3) $y' = 3^{\cot 1/x} . \ln 3 \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\cot \dfrac{1}{x}\right)$

pero $$\frac{d}{dx}\cot\frac{1}{x} = -\operatorname{cosec}^2\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{x}$$

así $$y' = \frac{3^{\cot 1/x}\ \ln 3\ .\ \operatorname{cosec}^2 1/x}{x^2}$$

(4) $y' = -\dfrac{e^{-x}}{10}(3 \text{ sen } 3x - \cos 3x) + \dfrac{e^{-x}}{10}(9\cos 3x + 3 \text{ sen } 3x) = e^{-x}\cdot\cos 3x$.

PROBLEMA 5. Derivar las siguientes funciones

(1) $y = x^n a^{-x^2}$ **(2)** $y = \sqrt{\cos x}\,.a^{\sqrt{\cos x}}$

(3) $y = 2^{\text{arc sen } 3x} + (1 - \text{arc cos } 3x)^2$.

SOLUCION.

(1) $y' = n x^{n-1}.a^{-x^2} + x^n . a^{-x^2} . \ln a.(-2x) = x^{n-1}.a^{-x^2}.\left(n - 2x^2 \ln a\right)$.

(2) $$y' = \frac{-\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}\cdot a^{\sqrt{\cos x}} + \sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}\cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}\cdot\left(\sqrt{\cos x}\right)$$

$$= -\frac{\text{sen } x . a^{\sqrt{\cos x}}}{2\sqrt{\cos x}}\left(1 + \ln a . \sqrt{\cos x}\right) .$$

(3) $$y' = 2^{\text{arc sen } 3x}\cdot \ln 2 \cdot \frac{d}{dx}(\text{arc sen } 3x) + 2(1 - \text{arc cos } 3x)\frac{d}{dx}(-\text{arc cos } 3x)$$

$$= 3\cdot\frac{2^{\text{arc sen } 3x}\ln 2}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{6(1 - \text{arc cos } 3x)}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$= \frac{3\left[\ln 2 . 2^{\text{arc sen } 3x} + 2 - 2 \text{ arc cos } 3x\right]}{\sqrt{1-9x^2}} .$$

PROBLEMA 6. Probar que la función $y = xe^{-x}$ satisface la ecuación $xy' = (1-x)y$.

SOLUCION. Tenemos $y = xe^{-x}$, $y' = e^{-x} - xe^{-x}$,

$$xy' = xe^{-x} - x^2 e^{-x} = y - yx = (1-x)\,y\ .$$

PROBLEMA 7. Usando diferenciación logarítmica hallar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones

(1) $y = x^x$

(2) $y = \sqrt[x]{x}$

(3) $y = x^{\operatorname{sen} x}$

(4) $y = x^{\sqrt{x}}$

(5) $y = (\operatorname{arc\,tg} x)^x$

(6) $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

SOLUCION.

(1) $\ln y = x \ln x$.

Derivando respecto de x

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x}{x}, \qquad y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)\ .$$

(2) $$y = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x\ ,$$

y derivando respecto de x: $$\frac{y'}{y} = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{y(1-\ln x)}{x^2} = \frac{\sqrt[x]{x}\,(1-\ln x)}{x^2}\ .$$

(3) $$y = x^{\operatorname{sen} x}$$

$$\ln y = \operatorname{sen} x . \ln x$$

y derivando respecto de x: $$\frac{y'}{y} = \cos x . \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$y' = x^{\operatorname{sen} x - 1}(x \cos x . \ln x + \operatorname{sen} x)\ .$$

(4) $y = x^{\sqrt{x}}$

$$\ln y = \sqrt{x}\ \ln x\ , \qquad \frac{y'}{y} = (\ln y)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\ ,$$

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2) = \frac{x^{\sqrt{x}-1/2}}{2}(\ln x + 2)\ .$$

(5) $y = (\text{arc tg}\ x)^x\ , \quad \ln y = x \ln \text{arc tg}\ x\ ,$

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = \ln \text{arc tg}\ x + \frac{x}{\text{arc tg}\ x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\ ,$$

$$y' = (\text{arc tg}\ x)^x\left[\ln \text{arc tg}\ x + \frac{x}{\left(1+x^2\right)\text{arc tg}\ x}\right].$$

(6) $y = (\cos x)^{\text{sen}\ x}\ , \quad \ln y = \text{sen}\ x \ln \cos x\ ,$

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = \cos x \ln \cos x + \frac{\text{sen}\ x}{\cos x}(-\text{sen}\ x)\ ,$$

$$y' = (\cos x)^{\text{sen}\ x}\left[\cos x \ln \cos x - \text{sen}\ x\ \text{tg}\ x\right].$$

PROBLEMA 8. Hallar los siguientes límites

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\text{sen}\ x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$.

SOLUCION.

(1) Para $x = 0$ resulta $\dfrac{0}{0}$, valor indeterminado. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x \ln a}{1} = \ln a\ .$$

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^{0}}{\cos 0} = 1 .$$

(3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 .$$

PROBLEMA 9. Si $f(x) = \frac{1}{2}\left(a^{x} + a^{-x}\right)$ probar que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\,f(x)\,f(y) .$$

SOLUCION.

$$2\,f(x)\,f(y) = \tfrac{1}{2}\left(a^{x} + a^{-x}\right)\left(a^{y} + a^{-y}\right) = \tfrac{1}{2}\left[a^{x+y} + a^{x-y} + a^{-x+y} + a^{-x-y}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[a^{x+y} + a^{-(x+y)} + a^{x-y} + a^{-(x-y)}\right] = f(x+y) + f(x-y) .$$

PROBLEMA 10. Probar que si $y = y(x)$ satisface la ecuación $y' = ay$, entonces $y = Ce^{ax}$, donde C es una constante.

SOLUCION. La función producto ye^{-ax} tiene derivada cero.

En efecto,

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-ax}\right) = \frac{dy}{dx}e^{-ax} + y\left(-ae^{-ax}\right) = a\,y\,e^{-ax} - a\,y\,e^{-ax} = 0$$

Luego por el teorema de la función constante

$$ye^{-ax} = C , \quad \text{donde } C \text{ es una constante ,}$$

de donde $\quad y = Ce^{ax}$

PROBLEMA 11. Un cuerpo a una temperatura desconocida se pone en un refrigerador a una temperatura constante de 0° F . Se sabe que la razón de cambio por unidad de tiempo de la temperatura del cuerpo es proporcional a dicha temperatura. Hallar la temperatura inicial del cuerpo si a los 20 minutos y 40 minutos las temperaturas leidas son de 40° F y 20° F , respectivamente.

SOLUCION. Tenemos $$\frac{dT}{dt} = kt \qquad (1)$$

donde T temperatura del cuerpo en $^{\circ}$F, en el tiempo t minutos, y k es una constante de proporcionalidad.

Resolviendo la ecuación (1) de acuerdo al problema 10

$$T = T(t) = Ce^{-kt} \qquad (2)$$

donde C es una constante.

Debemos encontrar la temperatura inicial $T(0) = C$ del cuerpo y disponemos de los siguientes datos:

t min	T °F
20	40
40	20

Reemplazando estos valores en (2) resultan las ecuaciones:

$$40 = Ce^{20k} \qquad (3)$$

$$20 = Ce^{40k} \qquad (4)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (3)

$$1600 = C^2 e^{40k} \qquad (5)$$

y dividiendo (5) entre (4) $\qquad 80 = C$.

Luego $\qquad T(0) = C = 80\ ^{\circ}\text{F}$.

PROBLEMA 12. Probar que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < \infty$.

SOLUCION. Aplicando el teorema de Taylor a $f(x) = e^x$ en $[-a, a]$, $a > 0$, en el punto $x_0 = 0$, se tiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N\ , \qquad -a \le x \le a \qquad (1)$$

en donde $R_N = \dfrac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}$, algún c en $[-a, a]$

Puesto que $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$, $|R_N| \le \dfrac{e^a}{(N+1)!}a^{N+1} \to 0$ si $N \to \infty$, y por lo tanto de (1) se sigue que

$$e^x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Capítulo 12

El Axioma del Supremo y sus Aplicaciones

12.1 INTRODUCCION

De una manera sencilla, un número real x es un ente matemático que se representa mediante una expresión decimal infinita

$$x = \pm N.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

en donde N es un entero ≥ 0 y cada a_i es un dígito decimal $0, 1, \ldots, 9$, tales como

10.000 ...	10.333 ...	−2.1428714287 ...
1.4142 ...	2.7182 ...	3.1415 ...

Dos números reales a y b pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse y también compararse: si son iguales o uno es menor que otro.

Un número real x es racional si puede ser representado por alguna fracción de enteros $\frac{n}{d}$, siendo n y d números enteros. En caso contrario, se dice que x es irracional.

Por ejemplo,

$$10 = 10.000\ldots \qquad \frac{31}{3} = 10.333\ldots \qquad -\frac{15}{7} = -2.1428714287\ldots$$

son números racionales.

Se demuestra que un número es racional si y sólo si tiene una expresión decimal periódica o recurrente, esto es, hay un grupo de dígitos que, a partir de un lugar de la expresión decimal, se repite indefinidamente.

En resumen, el conjunto de los números reales se compone de:

a) los números racionales, que comprende a los números enteros

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

y las fracciones de enteros $\dfrac{n}{d}$, en donde n y d son enteros;

y **b)** los números irracionales, tales como

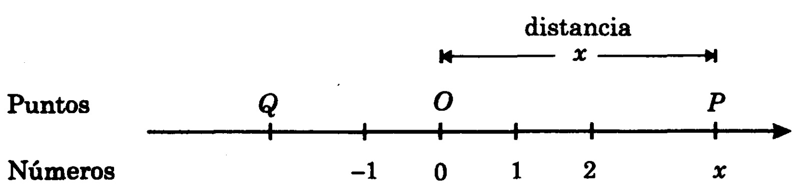
$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

$$e = 2.7182\ldots \quad \text{(el número } e\text{)}$$

$$\pi = 3.1415\ldots$$

que no pueden ser expresados como fracciones de enteros.

Geométricamente, los números reales pueden ser identificados con los puntos de una línea recta en la forma que se describe a continuación. Elegimos un punto O de la recta, llamado origen, y la recta queda dividida en dos semirrectas que tienen un extremo en O. Luego convenimos en llamar positiva a una de las semirrectas y negativa a la otra. También, suponemos que es dada una unidad de longitud para medir distancias entre puntos de la recta.



La correspondencia entre números reales y puntos de la recta se establece así:

1) al número 0 le corresponde el origen O

2) al número $x > 0$, le corresponde el punto P de la semirrecta positiva que dista x unidades del origen;

y **3)** a $x < 0$, le corresponde el punto Q que se encuentra en la semirrecta negativa a la distancia $-x$ unidades del origen.

12.2 AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

A partir de la descripción directa de los números reales dada en la sección anterior, es posible definir las operaciones de números y la relación de comparación, y luego deducir las reglas que éstas deben cumplir.

Otra forma de presentar a los números reales consiste simplemente en asumir o postular la existencia de un conjunto abstracto que cumple ciertas reglas o axiomas, y son suficientes para obtener no sólo la representación de los números mediante expresiones decimales (o en cualquier base entera ≥ 2) sino también los elementos y recursos para realizar procesos de límites (continuidad, derivación e integración) del análisis matemático, cuyos resultados se aplican constantemente en los modelos de los fenómenos naturales y sociales.

Formalmente postulamos (la existencia de) un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos se denominan números reales, tal que:

(1) existe una operación de adición, designada por $+$, que asocia a cada par de números a y b un único número real $a+b$, llamado suma de a y b.

(2) existe una operación de multiplicación, designada por $.$, que asocia a cada par de números a y b un único número $a \cdot b$, llamado producto de a y b;

(3) existe una relación menor, designada por $<$, que se expresa por $a < b$, *a es menor que b*, si a y b son números reales;

y **(4)** las operaciones de adición y multiplicación y la relación menor, satisfacen los axiomas o reglas **A1–A4, M1–M4, D, 01–04** y **S**, que se describen a continuación.

AXIOMAS DE LA ADICION.

A1 Ley asociativa

$$(a+b)+c = a+(b+c)\,, \quad \text{para } a, b \text{ y } c \text{ en } \mathbb{R}$$

A2 Ley conmutativa

$$a+b = b+a\,, \quad \text{para todo par de números } a \text{ y } b$$

A3 Existencia de cero

Existe un único número 0 tal que $a+0=a$ para todo a de $\mathbb{R}$

A4 Existencia de opuestos

Para cada a de $\mathbb{R}$ existe un único número $-a$, llamado opuesto de a, tal que

$$a+(-a) = 0$$

Nota. Es usual escribir $a-b$ en lugar de $a+(-b)$.

AXIOMAS DE LA MULTIPLICACION

M1 Ley asociativa

$$(a \, . \, b) \, . \, c = a \, . \, (b \, . \, c) \, , \text{ para } a, \ b \text{ y } c \text{ en } \mathbb{R}$$

M2 Ley conmutativa

$$a \, . \, b = b \, . \, a \, , \text{ para todo par de números } a \text{ y } b$$

M3 Existencia de elemento unidad

Existe un único número 1, distinto de 0, tal que $1 \, . \, a = a$, para todo a de $\mathbb{R}$.

M4 Existencia de inversos

Para cada a de $\mathbb{R}$, distinto de 0, existe un único número a^{-1}, llamado inverso de a, tal que $a \, . \, a^{-1} = 1$.

Nota. En lugar de $a \, . \, b$ se suele escribir ab, y si $b \neq 0$, también se escriben

$$\frac{1}{b} \quad (\text{o} \quad 1/b\,) \quad \text{en lugar de } b^{-1}$$

y

$$\frac{a}{b} \quad (\text{o} \quad a/b\,) \quad \text{por } ab^{-1}$$

D Ley distributiva

$$a \, . \, (b + c) = a \, . \, b + a \, . \, c \, , \text{ cualesquiera que sean } a, \ b \text{ y } c$$

AXIOMAS DE ORDEN

01 Ley de tricotomía

Para todo par de números reales a y b se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

	$a = b$	(*a y b son iguales*)
	$a < b$	(*a es menor que b*)
o	$b < a$	(*b es menor que a*)

02 Ley transitiva

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

03 Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

04 Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < bc$

Nota.

1) Se suele escribir:

$a > b$, *a es mayor que b*, si $b < a$

$a \le b$, *a es menor o igual a b*, si $a < b$ o $a = b$

$a \ge b$, *a es mayor o igual a b*, si $a > b$ o $a = b$

2) Se dice que a es positivo o negativo si $a > 0$ o $a < 0$, respectivamente.

AXIOMA DEL SUPREMO

S Si X es un conjunto de números no vacío, cuyos elementos son todos menores o iguales a un número c, entonces existe $s \in \mathbf{R}$, llamado supremo de X, que cumple las siguientes propiedades:

SUP1: $x \le s$ para todo x de $\mathbf{R}$

y **SUP2:** Si $t \in \mathbf{R}$ cumple $x \le t$ para todo $x \in X$, entonces $s \le t$.

Nota. Cualquier $c \in \mathbf{R}$ tal que $x \le c$ para todo $x \in X$, se denomina cota superior de X. Además, se dice que X es acotado superiormente si tiene al menos una cota superior.

La hipótesis del axioma **S** exige que X tenga una cota superior y en este caso el axioma asegura la existencia de un número real s con la propiedad de ser la *mínima* cota superior de X. En efecto, **SUP1** establece que s es una cota superior de X y **SUP2**, que si t es cualquier cota superior de X, entonces s es menor o igual a t.

Algunas de las consecuencias del axioma del supremo se desarrollan más adelante. Utilizando los axiomas anteriores (A1–A4, M1–M4, D Y 01–04) se demuestran las propiedades básicas conocidas de los números (ver 12.4).

12.3 NUMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES

Definimos ahora los sistemas de números naturales, enteros y racionales, que se designan por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, respectivamente.

Existe un subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbf{R}$ que cumple:

N1) $1 \in \mathbb{N}$, y si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$.

y **N2) Principio de inducción matemática**

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

$$1 \in S, \text{ y si } s \in S \text{ implica } s+1 \in S \qquad (*)$$

entonces S es igual a todo el conjunto $\mathbb{N}$.

En particular, por N1), se tiene que los números $1, \; 2 = 1+1, \; 3 = 2+1,$ etc., son elementos de $\mathbb{N}$, y por lo tanto $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS NATURALES

De la definición de $\mathbb{N}$ se deducen las siguientes propiedades de los números naturales, en las que a y b designan números naturales arbitrarios.

Se cumplen:

1) $a+b$ y $a.b \in \mathbb{N}$

2) $a \geq 1$

3) si $a \leq b \leq a+1$ entonces $a = b$ o $a = b+1$

4) Si $a < b$, entonces $a+1 \leq b$

5) **Principio del buen orden**

Si A es un subconjunto no vacío de números naturales, entonces existe $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo a de A.

m se denomina mínimo de A.

6) **Segundo Principio de Inducción Matemática**

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $1 \in S$

y **b)** si $1, \dots, m-1, \; m \in S$, implica que $m+1 \in S$ entonces S es igual a $\mathbb{N}$.

Por definición, el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ consiste de los números z tales que $z = 0$ y z ó $-z \in \mathbb{N}$.

Así,
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Finalmente,
$$\mathbb{Q} = \left\{ q \in \mathbb{R} \;/\; q = \frac{n}{d}, \text{ siendo } n \text{ y } d \in \mathbb{Z}, \; d \neq 0 \right\}$$

Presentamos sin demostración las propiedades básicas de los números reales. Estas propiedades se deducen empleando los axiomas dados y desde luego también las propiedades previamente establecidas, pues ya son consecuencias lógicas de tales axiomas.

12.4 PROPIEDADES BASICAS DE LOS NUMEROS REALES

Asumimos que a, b, c y d designan números reales. Se cumplen las siguientes reglas:

1) **Ley de cancelación de la adición:**

   Si $a+c=b+c$ entonces $a=b$

2) $-(a+b) = -a-b$

3) $-(-a)=a$

4) $a.0 = 0.a = 0$ para todo número real a.

5) $-a = (-1).a$

6) $(-a).b = -a.b$

7) $(-a).(-b) = a.b$, y en particular $(-1)(-1) = 1$

8) **Ley de cancelación de la multiplicación:**

   Si $a.c = b.c$ y c es distinto de cero, entonces $a=b$

9) Si $a \neq 0$ entonces $\frac{1}{a} \neq 0$ y su inverso es a, esto es, $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

10) $a.b=0$ implica $a=0$ o $b=0$

11) Si a y b son distintos de cero, entonces $ab \neq 0$

12) Si b y $d \neq 0$ entonces

   i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ ii) $\frac{da}{db} = \frac{a}{b}$

   iii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(ad+bc)}{bd}$ iv) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

13) Si $a<b$ y $c<d$ entonces $a+c<b+d$

14) Si $a<b$ entonces $-b<-a$

15) Si $a<b$ y $c<0$ entonces $ac>bc$

16) Si $a\neq 0$ entonces $a\,.\,a$ es positivo

17) 1 es positivo

18) Si a y b son positivos, entonces también lo son $a+b$ y ab.

19) Si $a\geq 0$ y $b\geq 0$ entonces $a+b=0$ si y sólo si $a=0$ y $b=0$

20) Si a es positivo, entonces $\dfrac{1}{a}$ es positivo y $a<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}>1$

21) $a\leq\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0 \Leftrightarrow a\leq 0$

22) Si b y d son positivos, entonces $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad>bc$

23) Para $a\in\mathbb{R}$, se define $|a|=$ valor absoluto de a, por

$$|a| = \begin{cases} 0 & \text{si } a=0 \\ a & \text{si } a>0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$$

Entonces se cumple:

i) $|a|\geq 0$ y $|a|=0$ si y sólo si $a=0$

ii) $|-a|=|a|$

iii) $a\leq|a|$ y $-a\leq|a|$

iv) $|a+b|\leq|a|+|b|$

v) $|ab|=|a|\,|b|$

vi) $|a-b|<c \Leftrightarrow b-c<a<b+c$

vii) $|a|\leq\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0 \Leftrightarrow a=0$

24) Potencias enteras

Si $a\neq 0$ y n es un entero ≥ 0, se define a^n por inducción sobre n: $a^0=1$ y $a^n=a^{n-1}a$, si $n\geq 1$.

Y si n es negativo, $a^n=\dfrac{1}{a^{-n}}$.

Entonces para todo a, b distintos de cero y enteros m, n, se verifican las propiedades:

i) $a^m a^n = a^{m+n}$

ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

iii) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

iv) $(ab)^n = a^n b^n$

12.5 APLICACIONES DEL AXIOMA DEL SUPREMO

Recordamos que en el sistema de los números reales $\mathbb{R}$ se cumple el Axioma del Supremo:

S Si X es un conjunto de números, no vacío y acotado superiormente (esto es, hay un número c tal que $x \le c$ para todo x de X), entonces existe $s \in \mathbb{R}$, llamado supremo de X, que satisface

SUP1: $x \le s$ para todo x de X

y **SUP2:** Si $t \in \mathbb{R}$ cumple $x \le t$ para todo $x \in X$, entonces $s \le t$.

Nótese que el axioma implica que existe supremo de X si y sólo si X es acotado superiormente.

Se prueba que un número s que cumpla **SUP1** y **SUP2** es único y por lo tanto se llama el supremo de X.

12.5.1 PROPIEDADES

Se asume que X e Y son conjuntos de números no vacíos

1) Para $s \in \mathbb{R}$ son equivalentes

SUP1 : Si $x \le t$ para todo $x \in X$, entonces $s \le t$.

y **SUP2':** Si $\varepsilon > 0$ entonces $s - \varepsilon < x_0$, para algún x_0 en X

2) **Infimo de un conjunto**

Si X es acotado inferiormente, —esto es, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \le x$, para todo x de X— entonces existe un único número i, llamado ínfimo de X, tal que

INF1 $i \le x$, para todo x de X

INF2 si $t \le x$, para todo x de X, entonces $t \le i$

Nota. **INF2** es equivalente a

INF2' Si $\varepsilon > 0$ entonces $x_0 < i + \varepsilon$, para algún x_0 de X

3) Si X es un subconjunto de Y, entonces

a) supremo $X \le$ supremo Y , si Y tiene supremo

y **b)** ínfimo $X \ge$ ínfimo Y, si Y tiene ínfimo

4) Parte entera de un número real

Para todo número real a existe un único entero z tal que $z \le a < z + 1$

Se define $[\![a]\!] = z$, la parte entera de a.

Entonces $a = [\![a]\!] + r$, en donde $[\![a]\!]$ es un número entero y $r = z - a$ cumple $0 \le r < 1$.

5) Propiedad arquimediana de los números reales

Para cada número real a existe un número entero positivo n tal que $n > a$.

12.5.2 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Unicidad del supremo

Probar que si s y s' cumplen SUP1 y SUP2 respecto del conjunto X , entonces $s = s'$.

SOLUCION. Para s tenemos

(1) SUP1: $x \le s$ para todo x de X

(2) SUP2: Si $t \in \mathbb{R}$ cumple $x \le t$ para todo $x \in X$, entonces $s \le t$.

y de igual modo para s'

(3) SUP1: $x \le s'$ para todo x de X

(4) SUP2: Si $t \in \mathbb{R}$ cumple $x \le t$ para todo $x \in X$, entonces $s' \le t$.

Por (3), el número $t = s'$ cumple $x \le t$ para todo x en X, y por lo tanto (2) implica $s \le t = s'$, esto es $s \le s'$.

Similarmente, por (1), el número $t = s$ cumple $x \leq t$ para todo x en X, y por lo tanto (4) implica $s' \leq t = s$, o $s' \leq s$.

Luego, $s = s'$.

PROBLEMA 2. Si s es un número y X es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, probar que son equivalentes.

SUP2: Si $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq t$.

y **SUP2':** Si $\varepsilon > 0$ entonces $s - \varepsilon < x_0$, para algún x_0 en X

SOLUCION.

SUP2 $\Rightarrow$ SUP2'

Sea $\varepsilon > 0$. Si fuese falso $s - \varepsilon < x_0$, para algún x_0 de X, entonces se tendría que $x \leq s - \varepsilon$, para todo x de X, y por SUP2 (con $t = s - \varepsilon$) resultaría que $s \leq s - \varepsilon$, de donde $\varepsilon \leq 0$, lo que contradice $\varepsilon > 0$. En consecuencia, SUP2' es verdadera.

SUP2' $\Rightarrow$ SUP2

Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq t$, para todo x de X. Hay que probar que $s \leq t$. Si fuese cierto que $t < s$, entonces haciendo $\varepsilon = s - t$ se tendría $t = s - \varepsilon$ y $\varepsilon > 0$, y aplicando SUP2', resultaría $t < x_0$, para algún x_0, una contradicción con la hipótesis $x \leq t$ para todo x de X.

PROBLEMA 3. Infimo de un conjunto

Probar que si X es un conjunto de números no vacío y acotado inferiormente, entonces el número $i = -s$, en donde s =supremo de $Y = \{-x \ / \ x \text{ en } X\}$, cumple

INF1 $i \leq x$, para todo x de X

INF2 si $t \leq x$, para todo x de X, entonces $t \leq i$

SOLUCION. Sea c una cota inferior de X, esto es $c \leq x$ para todo x de X.
El conjunto Y es no vacío, pues X lo es, y tiene la cota superior $-c$, ya que $c \leq x$, x en X, implica $-x \leq -c$. Luego, por el axioma del supremo, existe s = supremo de Y, esto es, s cumple:

SUP1 $-x \leq s$, para todo $-x$ de Y

SUP2 si $-x \leq t$, para todo $-x$ de Y, entonces $t \leq s$

Haciendo $s = -i$, y escribiendo $-t$ en lugar de t en SUP2, vemos que estas propiedades son precisamente INF1 e INF2.

PROBLEMA 4. Si X, Y son conjuntos no vacíos de números tales que X es un subconjunto de Y, entonces

$$\text{supremo } X \leq \text{ supremo } Y$$

si Y tiene supremo.

SOLUCION. Sea s' = supremo de Y; luego $y \leq s'$ para todo y de Y, y en particular $x \leq s'$ para todo x de X, pues X es parte de Y; luego existe s = supremo de X, y puesto que s' es una cota superior de X, por SUP2 para x con $t = s'$, se debe cumplir $s \leq s'$, es decir

$$\text{supremo } X \leq \text{ supremo } Y.$$

PROBLEMA 5. Parte entera de un número real

Probar que para todo número real a existe un único entero z tal que $z \leq a < z + 1$.

SOLUCION. Existencia de z

Caso 1. $1 \leq a$

Sea $S = \{ m \in \mathbb{N} / \ m \leq a \}$.

Vemos que S es no vacío, pues contiene a 1 por hipótesis, y acotado superiormente porque a es una cota superior de S, por definición. Luego, por el axioma del supremo, existe el número s = supremo de S. Entonces por SUP2' (con $\varepsilon = 1$) resulta

$$s - 1 < m_0 \quad \text{o} \quad s < m_0 + 1, \quad \text{para algún } m_0 \text{ de } S \qquad \textbf{(1)}$$

Como m_0 está en S, se cumple $m_0 \leq a$ y sólo falta probar que $a < m_0 + 1$. En efecto, si fuese $m_0 + 1 \leq a$, entonces $m_0 + 1 \in S$ y, por SUP1, se tendría $m_0 + 1 \leq s$, en contradicción con (1).

Por tanto, el número entero positivo $z = m_0$ cumple $z \leq a < z + 1$.

Caso 2. $0 \leq a < 1$

En este caso, el entero $z = 0$ cumple la propiedad requerida.

Caso 3. $a < 0$

Entonces $-a > 0$ y por los dos casos anteriores, existe un entero u tal que $u \leq a < u + 1$, de donde $-u - 1 < a \leq -u$

Definiendo z por

$$z = \begin{cases} -u-1 & \text{si } a < -u \\ -u & \text{si } a = -u \end{cases}$$

se comprueba fácilmente que $z \leq a < z+1$

Unicidad

Sean w y z dos números enteros

$$w \leq a < w+1$$

y $$z \leq a < z+1$$

Debemos probar que $w = z$. Si fuesen distintos, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z < w$. Entonces $w - z$ es un entero ≥ 1, esto es $z + 1 \leq w$, y de

$$a < z+1 \leq w \leq a$$

resulta $a < a$, una contradicción. Luego, se cumple $w = z$.

PROBLEMA 6. Propiedad arquimediana de los naturales

Demostrar que para cada número real a existe un entero positivo n tal que $n > a$.

DEMOSTRACION.

Si a es negativo tomamos $n = 1$. Y si $a \geq 0$, entonces $n = [\![a+1]\!]$ = parte entera de $a+1$, cumple $n \geq a+1$, y en consecuencia $n > a$ y $n \geq 1$.

PROBLEMA 7. Densidad de los números racionales

Probar que entre dos números reales distintos siempre existe un número racional, es decir, si $a < b$, con a y $b \in \mathbf{R}$, entonces existe $q \in \mathbf{Q}$ tal que $a < q < b$.

PRUEBA. Por la propiedad arquimediana, para el número $\dfrac{1}{b-a}$ existe un número natural d tal que $d > \dfrac{1}{b-a}$, de donde

$$db - da > 1 \quad \text{o} \quad da + 1 < db \tag{1}$$

y también
$$z \leq da < z+1 \tag{2}$$

si z = parte entera de da.

Sea $q = \dfrac{n}{d}$, con $n = z + 1$. Entonces q es un número racional y cumple $a < q < b$ pues:

$$\begin{aligned} a &= d\frac{a}{d} \\ &< \frac{z+1}{d} && \text{(pues } da < z+1, \text{ por (2))} \\ &= q \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q &= \frac{z+1}{d} \\ &\le \frac{da+1}{d} && \text{(pues } z \le da, \text{ por (2))} \\ &< d\frac{b}{b} && \text{(por (1))} \\ &= b \end{aligned}$$

PROBLEMA 8. Sea X un conjunto de números y $s \in \mathbf{R}$.

Probar que si a es una cota superior de X y $a \in X$, entonces a = supremo de X.

SOLUCION. El número a cumple SUP1 pues es una cota superior de X y también SUP2, ya que si

$$x \le t \ \text{ para todo } x \text{ de } X$$

en particular para $x = a \in X$ se tiene $a \le t$.

PROBLEMA 9. Hallar el supremo (si existe) de cada uno de los siguientes conjuntos de números

1) $A = \{ 2, -1, -10, 4 \}$

2) $B = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n^2} \;\middle/\; n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

3) $C = \left\{ n^2 - 5n \;/\; n = 10, 11, 12, \ldots \right\}$

4) $D = \{ x \in \mathbf{R} \;/\; 0 < x < 5 \}$

5) $E = \left\{ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) \middle/ \; n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$

6) $F = \{ x \in \mathbf{R} \;/\; x > 12 \}$

SOLUCION.

1) Se comprueba inmediatamente que 4 cumple SUP1 y SUP2 respecto del conjunto A; luego supremo $A = 4$

2) Vemos que $1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$ de modo que B es acotado superiormente y existe s = supremo de B.

Por SUP2 se tiene $s \leq 1$. Y por SUP1 $1 - \frac{1}{n^2} \leq s$, para todo n. Tomando límites cuando $n \to \infty$ resulta $1 \leq s$.

Luego, $s = 1$ es el supremo de B.

OTRA SOLUCION

Probaremos que 1 es el supremo de B comprobando directamente que además de SUP1 el número 1 satisface SUP2'.

En efecto, si $\varepsilon > 0$ es dado, por la propiedad arquimediana podemos encontrar un entero positivo n tal que $\frac{1}{\varepsilon} < n$; luego $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$ y se cumple SUP2'.

Por lo tanto, 1 es el supremo de B.

3) De $n^2 - 5n = n(n-5) > n$, si $n \geq 6$, vemos que los valores de estos números crecen cuando n lo hace; por lo tanto el conjunto C no debe ser acotado superiormente (en particular, no puede tener supremo). Formalmente demostraremos que C no tiene supremo; por el absurdo, supongamos que existe s = supremo de C; luego por SUP1 se tiene

$$n^2 - 5n \leq s \,, \quad \text{para todo } n$$

y por la desigualdad establecida $n < s$, si $n \geq 6$. **(1)**

Sin embargo, por la propiedad arquimediana podemos encontrar un entero n tal que $n > s$ y $n \geq 6$, lo que contradice a (1).

Concluimos entonces que B no tiene supremo.

4) Probaremos que 5 = supremo de D

Por definición del conjunto D, 5 cumple SUP1. Y también satisface SUP2'. Si $\varepsilon > 0$ es dado y elejimos un entero n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$, o $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces $x = 5 - \frac{1}{n}$ cumple $0 < x < 5$, o sea $x \in D$, y $5 - \varepsilon < x$.

5) $\operatorname{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ toma el valor 0 si n es par y $(-1)^m$, si $n = 2m+1$; luego el conjunto E es $\{-1, 0, 1\}$ y 1 = supremo de E.

6) La definición de F implica que no es acotado superiormente; por lo tanto no tiene supremo.

PROBLEMA 10. Probar que existe el número

$$s = \text{supremo de } A = \left\{ x \in \mathbf{R} \;/\; x^2 < 3 \right\}$$

y además que $s^2 = 3$, $1 \le s \le 2$.

SOLUCION. A es no vacío (1 es elemento de X), y 2 es una cota superior de A pues si $x^2 < 3$ entonces $|x|^2 < 2^2$, de donde $|x| < 2$ y $x < 2$.

Luego, existe s = supremo de A y cumple la desigualdad $1 \le s \le 2$, por SUP1, SUP2 y las observaciones anteriores.

Vamos a demostrar que $s^2 = 3$, esto es $s = \sqrt{3}$.

Método 1

Para cada $n \ge 1$ aplicamos SUP2' con $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ y encontramos x_n en A tal que $s - \dfrac{1}{n} < x_n$; luego

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 < x_n^2 \le 3 \qquad \text{(pues } x_n \in A\text{)}$$

y haciendo $n \to \infty$, $s^2 \le 3$.

Por otra parte para todo $n \ge 1$ se tiene $s + \dfrac{1}{n} > s$ y por SUP1 $s + \dfrac{1}{n}$ no pertenece al conjunto A, esto es $3 \le \left(s + \dfrac{1}{n}\right)^2$; y haciendo $n \to \infty$ resulta $3 \le s^2$.

Luego $s^2 = 3$.

Método 2

Probaremos que no pueden ocurrir las desigualdades $s^2 < 3$ o $s^2 > 3$.

Si $s^2 < 3$ podemos encontrar $0 < \varepsilon < 1$ tal que $(s+\varepsilon)^2 < 2$ **(1)**

En efecto, la desigualdad es equivalente a $s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < 3$

y puesto que el primer miembro es menor que $s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon$ (pues $\varepsilon^2 \le \varepsilon$) bastará que este número sea menor que 3

o $(2s+1)\varepsilon < 3 - s^2$, esto es $\varepsilon < \dfrac{3-s^2}{2s+1}$; **(2)**

luego, si hacemos $\varepsilon = \dfrac{m}{2}$, con m = menor de 1 y $\dfrac{3-s^2}{2s-1}$, entonces son ciertas (2) y (1).

De la desigualdad (1) se sigue que $s+\varepsilon$ es un elemento de X y por SUP1 se debe tener $s+\varepsilon \le s$, una contradicción. Luego, es imposible que $s^2 < 3$.

Si $s^2 > 3$, procediendo como en el caso anterior, podemos encontrar $0 < \varepsilon < s$ tal que

$$(s-\varepsilon)^2 > 3 \qquad \textbf{(3)}$$

En efecto, de $s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon$

será suficiente que $s^2 - 2s\varepsilon > 3$, o $\varepsilon < \dfrac{s^2-3}{2s}$; luego (3) se cumple si ε es igual a $\dfrac{m}{2}$, con m = menor de s y $\dfrac{s^2-3}{2s}$. Sin embargo, por SUP2', para ε, existe un x en A tal que $s - \varepsilon < x$; luego $(s-\varepsilon)^2 < x^2 < 3$, en contradicción con (3), y por consiguiente, tampoco es cierto que $s^2 > 3$.

En conclusión, se debe cumplir $s^2 = 3$.

PROBLEMA 11. Encontrar el supremo de los siguientes conjuntos

1) $A = \left\{ \dfrac{x-1}{x-2} \;\middle/\; x > 2 \right\}$ **2)** $B = \left\{ \dfrac{1}{1+x^2} \;\middle/\; \text{cualquier } x \right\}$

3) $C = \left\{ \operatorname{sen}(a)^n \;/\; n = 1, 2, \ldots \right\}$ si $0 \le a \le \pi$

SOLUCION.

1) Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Notamos que el valor $f(x)$ crece indefinidamente si $x > 2$ se acerca a 2 y por lo tanto el conjunto será no acotado. En efecto, dado $K > 0$ siempre podemos encontrar un $x > 2$ tal que

$$\frac{1}{x-2} > K \qquad \text{o} \qquad x > 2 + \frac{1}{K}$$

por ejemplo $x = 3 + \dfrac{1}{K}$, y por lo tanto $f(x) > K$.

Luego A no tiene supremo.

2) Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, entonces $1 = f(0) \geq f(x)$, para todo x, pues $1 \leq 1 + x^2$, y por lo tanto $1 \in B$ y también es una cota superior de B, lo cual implica

$$1 = \text{supremo de } B.$$

3) Sea $b = \text{sen}\,(a)$; de $0 \leq a \leq \pi$ se sigue que $0 \leq b \leq 1$ y por lo tanto $b^1 \geq b^n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$; luego $b \in C$ y es una cota superior de C y por consiguiente b = supremo de C.

PROBLEMA 12. Se dice que una función $f(x)$, x en X, es acotada superiormente si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq c$ para todo x en X; en este caso existe supremo $\{ f(x) \ / \ x \text{ en } X \}$ y se designa por $\sup\limits_X f$.

1) Si $f(x) \leq g(x)$, para todo x, y $g(x)$ es acotada superiormente, probar que $\sup\limits_X f \leq \sup\limits_X g$

2) Si $f(x)$ y $g(x)$ son acotadas superiormente y $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, probar que $\sup\limits_X (f+g) \leq \sup\limits_X f + \sup\limits_X g$

3) Si $f(x)$ es acotada superiormente y $c \in \mathbb{R}$, probar que

$$\sup_X (f+c) = \sup_X f + c$$

en donde $(f+c)(x) = f(x) + c$

SOLUCION.

1) Sean $A = \{ f(x) \ / \ x \text{ en } X \}$ y $B = \{ g(x) \ / \ x \text{ en } X \}$

Por SUP1 el número $s' = \sup\limits_X g =$ supremo de B cumple

$$g(x) \leq s' , \quad \text{para todo } x \text{ en } X$$

y de $f(x) \leq g(x)$ resulta $f(x) \leq s'$.

de donde A tiene supremo $s = \sup\limits_X f$ y cumple $s \leq s'$, por SUP2 para s;

luego $\sup\limits_X f < \sup\limits_X g$.

2) Sean $s = \sup\limits_X f$ y $s' = \sup\limits_X g$; luego para todo x en X se tiene $f(x) \leq s$ y $g(x) \leq s'$, $f(x)+g(x) \leq s+s'$ de modo que el conjunto

$$C = \{ (f+g)(x) \ / \ x \text{ en } X \}$$

es acotado superiormente por $s+s'$ y si $s'' = \sup\limits_X (f+g)$ entonces $s'' \leq s+s'$, por SUP2 para s''.

Así,
$$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$$

3) Sea $s = \sup\limits_X f$. Entonces

SUP1 Si $f(x) \leq s$ para todo x en X

y SUP2 si $f(x) \leq t$ para todo x en X, entonces $s \leq t$

de donde $s+c$ cumple

$$f(x)+c \leq s+c \quad \text{para todo } x \text{ en } X$$

y si $f(x)+c \leq t'$ para todo x en X, entonces $f(x) \leq t'-c$ y por SUP2,

$$s \leq t'-c , \quad \text{o} \quad s+c \leq t'$$

esto es, $s+c$ es el supremo del conjunto $\{ (f+c)(x) \ / \ x \text{ en } X \}$ y por lo tanto $\sup\limits_X (f+c) = s+c = \sup\limits_X f + c$

12.6 CONVERGENCIA DE SUCESIONES NUMERICAS

Utilizando el axioma del supremo se establece el criterio de convergencia de las sucesiones monótonas acotadas, el criterio de Cauchy y la existencia de subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas. (Ver capítulo 0)

12.6.1 CRITERIO DE LAS SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

Si (a_n) es una subsucesión tal que $a_n \leq a_{n+1} \leq C$, para todo n, y un determinado C, entonces (a_n) es convergente y $a_k \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq C$, para todo k.

De igual modo, si $a_n \geq a_{n+1} \geq B$, para todo n, entonces

$$a_k \geq \lim_{n\to\infty} a_n \geq B, \qquad \text{para todo } k.$$

PRUEBA. Supongamos que se cumple $a_n \leq a_{n+1} \leq C$, para todo n.

Sea X el conjunto formado por los términos de la sucesión, esto es $X = \{ a_n \ / \ n \geq 0 \}$. X es no vacío y acotado superiormente por C; luego por el axioma del supremo existe L = supremo de X. Probaremos que L es el límite de (a_n).

Sea dado $\varepsilon > 0$. Por SUP2' existe a_{n_0} tal que $L - \varepsilon < a_{n_0}$ (1)

Entonces si $n \geq n_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< a_{n_0} & & \\ &\leq a_n & & \left[\text{pues } a_{n_0} \leq a_n \right] \\ &\leq L & & [\text{ por SUP1 }] \\ &< L + \varepsilon & & \end{aligned}$$

esto es $\left| L - a_n \right| < \varepsilon$, cuando $n \geq n_0$

lo que significa $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Además es cierto que $a_n \leq L \leq C$, por SUP1 y SUP2.

12.6.2 SUBSUCESIONES CONVERGENTES DE SUCESIONES ACOTADAS

Si (a_n) es una sucesión de números tal que $c \le a_n \le d$ para todo n, entonces existe una colección de subíndices enteros $1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ tal que si $x_k = a_{n_k}$, entonces la sucesión (x_k) es convergente.

Nota. Se dice que (a_{n_k}) es una subsucesión convergente de (a_n).

Si $L = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, por definición se cumple:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $k \ge N$ implica $|L - a_{n_k}| < \varepsilon$.

Observemos además que $c \le L \le d$ y $n_k \ge k$, para todo k.

PRUEBA

Para cada n sea $X_n = \{ a_k \ / \ k \ge n \}$, esto es, X_n consiste de los términos a_n, $a_{n+1}, \dots$, cuyos subíndices son mayores o iguales a n.

Es claro que los X_n son no vacíos y acotados inferiormente (c es una cota inferior) y por lo tanto existe i_n = ínfimo de X_n.

Puesto que X_{n+1} es parte de X_n, se tiene $i_n \le i_{n+1}$ lo que muestra que (i_n) es una sucesión monótona creciente. Además $c \le i_n \le d$, para todo n; en efecto,

$$c \le i_n \quad \text{por INF1 para } i_n \quad \text{y} \quad i_n \le a_n \le d$$

En particular (i_n) es acotada superiormente y por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas existe $L = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$ que cumple $a_n \le i_n \le L \le d$, para todo n, y en particular $c \le L \le d$.

Probaremos que L satisface la siguiente propiedad:

Para todo ε y entero $n \ge 0$, existe un $k > n$ tal que

$$|L - a_k| < \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

En efecto, de $L = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$, para $\varepsilon > 0$ existe N tal que $L - i_N < \varepsilon$, $L - \varepsilon < i_N$, y como $i_N < i_m$, para todo $m \ge N$, podemos suponer que $N > n$, y por lo tanto tenemos un entero $N > n$, tal que

$$L - \varepsilon < i_N \le L \qquad \textbf{(2)}$$

En forma similar, de $\quad i_N$ = ínfimo de $\{ a_N , a_{N+1} , \dots \}$

por INF1 e INF2' existe un a_k , $k \geq N$, tal que

$$i_N \leq a_k \leq i_N + \varepsilon \tag{3}$$

Luego

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< i_N && [\text{ por (2) }] \\ &\leq a_k < i_N + \varepsilon && [\text{ por (3) }] \\ &\leq L + \varepsilon && [\text{ por (2) }] \end{aligned}$$

esto es $|L - a_k| < \varepsilon$, para algún $k \geq N > n$, lo que prueba (1).

Ahora procedemos a encontrar una sucesión de subíndices

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \quad \text{tales que} \quad \left| L - a_{n_k} \right| < \frac{1}{k} \tag{4}$$

Aplicando (1) con $\varepsilon = 1$ y $n = 1$, elegimos $n_1 = k > 1$ tal que $\left| L - a_{n_1} \right| < 1$.
Suponiendo que ya se hallaron $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p$, aplicamos (1) con $\varepsilon = \dfrac{1}{p+1}$ y $n = n_p$ y podemos elegir

$$n_{p+1} = k > n_p \quad \text{tal que} \quad \left| L - a_{n_{p+1}} \right| < \frac{1}{(p+1)}$$

lo que completa el proceso de inducción y establece (4).
De (4) se sigue $L = \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$.

12.6.3 CRITERIO DE CAUCHY

(a_n) es convergente si y sólo si satisface el criterio de Cauchy: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N, que depende de ε , tal que si m y $n \geq N$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

PRUEBA. Supongamos que (a_n) es convergente y que su límite es L. Probaremos que se cumple el criterio de Cauchy: Dado $\varepsilon > 0$, sea N tal que si $n \geq N$ entonces $|L - a_n| < \varepsilon/2$; luego si m y $n \geq N$ se tiene

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \varepsilon .$$

Recíprocamente, si (a_n) satisface el criterio de Cauchy demostraremos que es convergente.

Primero probaremos que (a_n) tiene una subsucesión convergente, lo que, por el problema anterior, será cierto si (a_n) es acotada.

La propiedad asumida puede expresarse en la forma:

Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si m y $n \geq N$ entonces

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

En particular, si $m = N$, se tiene

$$a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon \qquad \textbf{(2)}$$

para todo $n \geq N$, y si hacemos

$$c = \text{menor de los números } a_0 - \varepsilon \text{ , } a_1 - \varepsilon \text{ , } \dots \text{ , } a_N - \varepsilon$$

$$d = \text{mayor de los números } a_0 + \varepsilon \text{ , } a_1 + \varepsilon \text{ , } \dots \text{ , } a_N + \varepsilon$$

entonces $c \leq a_n \leq d$, para todo $n \geq 0$, y por lo tanto la sucesión es acotada.

Elijamos luego una subsucesión convergente (a_{n_k}) y sea L su limite. Demostraremos que L también es el límite de (a_n).

Sea dado $\varepsilon > 0$ y elijamos N tal que si m y $n \geq N$ entonces

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2$$

y de $L = \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$, existe M tal que si $k \geq M$ entonces

$$|L - a_{n_k}| < \varepsilon/2$$

en particular si $P = n_k$, con k = mayor de los números N y M, se tiene $P = n_k \geq k \geq N$ y $k \geq M$; luego

$$|a_P - a_n| < \varepsilon/2 \text{ , para todo } n \geq P$$

y

$$|L - a_P| < \varepsilon/2$$

de donde $|L - a_n| \leq |L - a_P| + |a_P - a_n| < \varepsilon$.

para todo $n \geq P$.

Por lo tanto, $L = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Nota. El hecho que las sucesiones que satisfacen el criterio de Cauchy posean límites en $\mathbb{R}$ es en verdad una consecuencia del axioma del supremo. En efecto, la implicación $\Leftarrow$, *sólo si*, se dedujo usando 12.6.2 ($\Leftarrow$ 12.6.1 $\Leftarrow$ axioma del supremo).

12.7 APLICACIONES A LAS FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección demostraremos que las propiedades fundamentales de las funciones continuas (Ver 7.7, CAP7) se deducen del axioma del supremo. Puesto que las aplicaciones de tales propiedades han sido desarrolladas antes, la exposición tiene un carácter teórico.

La siguiente propiedad será utilizada frecuentemente:

12.7.1 Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Entonces para toda sucesión convergente (a_n) de números a_n en $[a, b]$ se cumple

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

PRUEBA. Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; notemos que $L \in [a, b]$, pues $a \le a_n \le b$.

Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en L existe $\delta > 0$ tal que $|L - x| < \delta$, x en $[a, b]$, implica $|f(L) - f(x)| < \varepsilon$; y puesto que L es el límite de (a_n), para $\delta > 0$ existe N tal que

$$\text{si} \quad n \ge N \quad \text{entonces} \quad |L - a_n| < \delta \ ;$$

luego, $n \ge N$ implica $|f(L) - f(a_n)| < \varepsilon$, y $f(L) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

12.7.2 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Para todo valor y^* entre $f(a)$ y $f(b)$, inclusive, existe x^* en $[a, b]$ tal que $y^* = f(x^*)$.

PRUEBA.

Caso 1. $f(a) \le f(b)$

Sea y^* tal que $f(a) \le y^* \le f(b)$.

Si $y^* = f(a)$ o $y^* = f(b)$, entonces se cumple el resultado con $x^* = a$ o $x^* = b$, respectivamente. Luego podemos suponer que y^* es distinto de $f(a)$ y $f(b)$ y por lo tanto que

$$f(a) < y^* < f(b) \qquad \textbf{(1)}$$

Sea $$X = \left\{ x \ / \ f(x) < y^*, \quad x \text{ en } [a,b] \right\}$$

Entonces X es no vacio, pues $a \in X$ por (1), y acotado superiormente por b. Por el axioma del supremo existe x^* en $\mathbb{R}$ tal que x^* = supremo de X.

Es inmediato que $x^* \in [a,b]$. En efecto, $a \le x^*$, por SUP1, y $x^* \le b$, por SUP2. Demostraremos que $y^* = f\left(x^*\right)$.

Aplicando SUP2' sucesivamente con $\varepsilon = 1/n$, $n \ge 1$, podemos hallar a_n en X tal que $x^* - \dfrac{1}{n} < a_n \le x^*$.

Luego, $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $f\left(x^*\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le y^*$, pues a_n en X; así $f\left(x^*\right) \le y^*$.

Como $y^* < f(b)$ se debe tener $x^* < b$ y si $N > 1/\left(b - x^*\right)$, $1/N < b - x^*$, $1/n < b - x^*$, para todo $n \ge N$. Sea $x_n = x^* + 1/n$, $n \ge N$; luego $x^* < x_n < b$ y x_n no pertenece a X, o sea $f(x_n) \ge y^*$ y de $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se tiene ahora

$$f\left(x^*\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ge y^*,$$

esto es $f\left(x^*\right) \ge y^*$.

Y queda demostrado que $f\left(x^*\right) = y^*$.

Caso 2. $\boldsymbol{f(a) > f(b)}$

Sea y^* tal que $f(a) \ge y^* \ge f(b)$.

Definimos la función $g(x) = -f(x)$, $x \in [a,b]$.

Entonces g es continua y $g(a) \le -y^* \le g(b)$.

Por el caso 1, existe x^* en $[a,b]$ tal que $-y^* = g\left(x^*\right)$, de donde $y^* = f\left(x^*\right)$.

12.7.3 TEOREMA DE LOS VALORES MAXIMO Y MINIMO

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existen x_0 y x_1 en $[a,b]$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{para todo } x \text{ en } [a,b]$$

esto es, $\quad m = f(x_0) =$ valor mínimo de f

y $\quad M = f(x_1) =$ valor máximo de f

En particular $f(x)$ es una función acotada: $|f(x)| \leq C$ para todo x en $[a,b]$, si

$$C = \text{mayor de los números } |M| \text{ y } |m|.$$

PRUEBA. Primero demostraremos que el teorema se cumple para funciones acotadas.

Si $f(x)$ es acotada entonces el conjunto $Y = \{ f(x) \ / \ x \text{ en } [a,b] \}$, formado por los valores de $f(x)$, es acotado superiormente (e inferiormente). Luego existe M = supremo de Y, esto es M satisface

SUP1 $\quad y \leq M$, para todo $y = f(x)$

y $\quad$ SUP2' $\quad$ para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $M - \varepsilon < y \leq M$, en algún y de Y

Para cada $n \geq 1$ por SUP2', para $\varepsilon = 1/n$, podemos hallar y_n en Y tal que

$$M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$$

Puesto que $y_n \in Y$ elegimos a_n en $[a,b]$ tal que $y_n = f(a_n)$, y asi

$$M - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq M \tag{1}$$

para todo $n \geq 1$.

Por 12.6.2 (la sucesión (a_n) es acotada), existe una subsucesión (a_{n_p}) que converge a algún x^* en $[a,b]$, esto es

$$x^* = \lim_{p \to \infty} a_{n_p} \tag{2}$$

Ahora probaremos que $M = f(x^*)$, y por lo tanto que $f(x^*)$ es en verdad el valor máximo de $f(x)$ en $[a,b]$.

Usando 12.7.1 se tiene $\quad f(x^*) = \lim\limits_{p\to\infty} f(a_{n_p})$

y de (1) también $M = \lim\limits_{p\to\infty} f(a_{n_p})$ pues $\quad \left|M - f(a_{n_p})\right| < \dfrac{1}{n_p} \le \dfrac{1}{p}$

Así, $M = f(x^*)$ y $x_1 = x^*$ da el valor máximo de f

Para probar que existe el valor mínimo de f, aplicamos la parte anterior a la función $g(x) = -f(x)$, que también es continua, y encontramos un x_0 en $[a,b]$ tal que $g(x_0)$ = máximo de g, o sea para todo x en $[a,b]$ se cumple

$$g(x) \le g(x_0)\,, \qquad -f(x) \le -f(x_0), \qquad f(x_0) \le f(x)$$

y por lo tanto $m = f(x_0)$ = mínimo de f en $[a,b]$.

Ahora demostraremos el teorema para el caso general, esto es no asumimos que $f(x)$ sea acotada.

Consideremos la función $g(x) = \dfrac{1}{1+f(x)^2}$, x en $[a,b]$

Entonces $g(x)$ es continua, pues $f(x)$ lo es, y es acotada ya que $0 < g(x) \le 1$, para todo x en $[a,b]$. Por el caso tratado para las funciones acotadas existe x^* en $[a,b]$ tal que $g(x^*)$ es el valor mínimo de $g(x)$, esto es

$$g(x^*) \le g(x) \text{ para todo } x \text{ en } [a,b]$$

de donde $|f(x)|^2 \le \left|f(x^*)\right|^2$, $|f(x)| \le C$, con $C = \left|f(x^*)\right|$, y por lo tanto $f(x)$ también es acotada. Y aplicando otra vez el caso de las funciones acotadas concluimos que $f(x)$ toma sus valores máximo y mínimo en $[a,b]$.

12.7.4 TEOREMA DE CONTINUIDAD UNIFORME

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ entonces $f(x)$ es uniformemente continua en dicho intervalo, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, que sólo depende de ε, tal que

$$|x-y| < \delta\,,\ x,y \text{ en } [a,b], \text{ implican } |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

PRUEBA. Supongamos que la conclusión es falsa y probemos que esto conduce a una contradicción.

Que la conclusión sea falsa significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay un par de números x, y en $[a,b]$, que dependen de δ, tal que $|x-y| < \delta$ y $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

En particular, para $\delta = 1/n$, $n \geq 1$, existen x_n, y_n en $[a,b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon \tag{1}$$

Puesto que los elementos de la sucesión (x_n) se encuentran en el intervalo $[a,b]$ existe una subsucesión convergente $\left(x_{n_p}\right)$ con límite L en $[a,b]$.

Sean $x'_p = x_{n_p}$, $y'_p = y_{n_p}$. Tenemos $L = \lim\limits_{p\to\infty} x'_p$ y por (1)

$$|x'_p - y'_p| < \frac{1}{n_p} \leq \frac{1}{p} \quad , \quad |f(x'_p)-f(y'_p)| \geq \varepsilon \tag{2}$$

Luego $\lim\limits_{p\to\infty} (y'_p - x'_p) = 0$, y de $y'_p = x'_p + (y'_p - x'_p)$ también se sigue $\lim\limits_{p\to\infty} y'_p = L$. Puesto que $f(x)$ es continua en L aplicamos 12.7.1 a las dos sucesiones y obtenemos

$$\lim_{p\to\infty} \left[f(x'_p)-f(y'_p)\right] = \lim_{p\to\infty} f(x'_p) - \lim_{p\to\infty} f(y'_p) = f(L)-f(L) = 0$$

y por lo tanto para el valor dado de ε existe p tal que $\left|f(x'_p) - f(y'_p)\right| < \varepsilon$, en contradicción con (2).

Por consiguiente, la función $f(x)$ es uniformemente continua en $[a,b]$.

Indice Alfabético

A

Aceleración instantánea, 275

Angulo:
- de rotación, 112
- entre dos curvas, 270
- entre dos rectas, 19

Arco:
- cosecante, 456
- coseno, 453
- cotangente, 455
- secante, 455
- seno, 452
- tangente, 453

Asíntotas de:
- la hipérbola, 91
- una curva, 163

Axioma del supremo, 519

C

Cálculo de extremos absolutos en intervalos arbitrarios, 397

Centro de:
- la elipse, 76
- la hipérbola, 89

Círculo:
- definición, 57
- ecuación, 57

Concavidad, 400

Continuidad en:
- un intervalo abierto, 172
- un intervalo cerrado, 178
- un punto, 171

Criterio de:
- Cauchy, 34, 536
- concavidad, 401
- la primera derivada para extremos relativos, 390
- la segunda derivada para extremos relativos, 395
- sucesiones monótonas acotadas, 34, 534

Cuerda focal de una cónica, 119

D

Derivación:
- de funciones parametrizadas, 266
- implícita, 263
- logarítmicas, 484

Derivada de:
- la función inversa, 437
- una función, 199

Derivadas:
- de funciones elementales, 214, 218
- de las funciones trigonométricas inversas, 456
- de orden superior, 261
- por la derecha y por la izquierda, 212

Diferenciales:
- de órdenes superiores, 313
- definición, 310

Directriz de:
- la elipse, 81
- una parábola, 62
- una sección cónica, 103

Discontinuidad, clasificación, 175

Discriminante de la ecuación de segundo grado, 111

Distancia:
- de un punto a una recta, 19
- entre dos puntos, 18

E

Ecuación:
- de la elipse, 76
- de la hipérbola, 90
- de la recta, 18
- diferencial, 262
- general de segundo grado, 111

Eje de la parábola, 63

Ejes de la:
- elipse, 76
- hipérbola, 90

Elipse, definición, 75

Excentricidad de:
- la elipse, 76
- la hipérbola, 90
- una sección cónica, 103

Exponencial: 157, 497
- general, 499

Extremo relativo, 323

F

Foco de una:
- parábola, 63
- sección cónica, 103

Focos de la:
- elipse, 76
- hipérbola, 89

Formas indeterminadas, 366

Función Inversa, definición, 431

Funciones:
- crecientes, 388
- decrecientes, 388

H

Hipérbola:
- equilátera, 90
- definición, 89

Hipérbolas conjugadas, 92

I

Infimo, 523

Intervalos, 19

L

Lado recto de:
- la elipse, 85
- una hipérbola, 101
- una parábola, 66

Ley de movimiento, 275

Límite:
- de la composición de dos funciones, 131
- definición, 123

Límites:
infinitos, 155
que contienen infinito, 150
unilaterales, 147
Logaritmo natural, 476
Longitud de un vector, 21

M

Máximo:
absoluto de una función, 322
relativo, 323
Mínimo:
absoluto, 323
relativo, 323

N

Número *e*, 35, 157, 499

P

Parábola:
definición, 63
ecuación, 64
Parte entera, 524, 526
Pendiente de:
un segmento, 18
una recta, 18
Prolongación continua de una función, 175
Propiedades de la derivación, 213
Punto:
crítico, 324
medio, 18
Puntos de inflexión, 400

R

Razón de cambio:
instantánea, 274
promedio, 274
Recta:
normal a una curva, 202, 269
tangente a una curva, 201, 269
Regla:
de L'Hôspital, 366
de la cadena, 242
de Leibniz, 294
para calcular la derivada, 200
para determinar los extremos relativos, 391
Rotación de ejes, 107

S

Sección cónica, definición, 103
Segmento de la:
normal, 270
tangente, 270
Segunda derivada, 261
Semiejes de la:
elipse, 76
hipérbola, 90
Series, 48
Subnormal, 270
Subtangente, 270
Subsucesiones, 535
Sucesiones, 22
Sucesiones acotadas, 23
Sucesiones convergentes, 24
Sucesiones divergentes, 24
Supremo, 517

T

Teorema:
de continuidad uniforme, 541
de la diferencia constante, 357
de la función constante, 357
de Rolle, 349
de Taylor, 354
del cero, 181, 194
del extremo estacionario, 324

del incremento local, 413
del Sandwich, 128, 145
del valor intermedio, 181
del valor medio, 351
del valor medio generalizado, 355
Traslación de ejes, 105

U

Unicidad del límite, 136

V

Valor absoluto, 17
Velocidad instantánea, 275
Vértices de la parábola, 64
Vértices de la:
elipse, 76
hipérbola, 90

Impreso en los talleres de
INDUSTRIAL*gráfica* S.A.
Chavín 45 Lima 5 Perú
Email: igsa@bwnet.com.pe
Teléfono: 431-2505
Fax: 431-3601
Marzo 2001